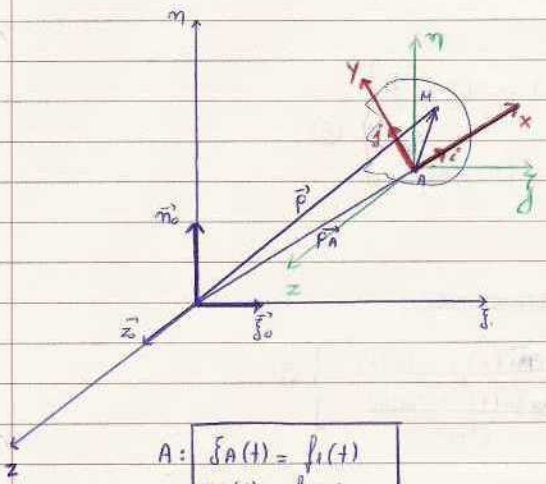
Μηχανική ΙΙΙ



$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

ταχυτικό στιγμιαίο

πολλ. περιστροφικά

$$A: \boxed{\begin{aligned} \xi_A(t) &= f_1(t) \\ \eta_A(t) &= f_2(t) \\ \varphi(t) &= f_3(t) \end{aligned}}$$

$$\boxed{\omega(t) = \varphi'(t)}$$

$$\vec{p} = \vec{\rho_A} + \vec{r} \quad \Big| \frac{d}{dt} \quad (1)$$

$$\vec{U_M} = \frac{d\vec{\rho_M}}{dt} = \frac{d\vec{\rho_A}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad (2)$$

<u>Άρα</u>

$$\boxed{\begin{aligned} \xi_P(t) &= \xi_A - \frac{1}{\omega}\frac{d\eta_A}{dt} \\ \eta_P(t) &= \eta_A + \frac{1}{\omega}\frac{d\xi_A}{dt} \end{aligned}} \quad (3)$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_P(t) &= \frac{-V_A\big|_y}{\omega} \\ y_P(t) &= \frac{U_A\big|_x}{\omega} \end{aligned}} \quad (4)$$

→ προβολή στον y.

$$\left.\begin{aligned} U_A\big|_x &= \dot{\xi}_A(t)\cos\varphi + \dot{\eta}_A(t)\sin\varphi \\ V_A\big|_y &= \dot{\xi}_A(t)\sin\varphi + \dot{\eta}_A(t)\cos\varphi \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

$$\vec{\gamma_M} = \frac{d\vec{U_M}}{dt} = \frac{d\vec{U_A}}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\gamma_A} + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} - \omega^2 \vec{r} \quad (6)$$

$$\vec{\gamma_M} = \frac{d\vec{\rho_A}}{dt^2} + \vec{\varepsilon} \times (\vec{p} - \vec{\rho_A}) - \omega^2(\vec{p} - \vec{\rho_A}) \quad (7)$$

Στο σύστημα $\Omega\xi\eta z$:

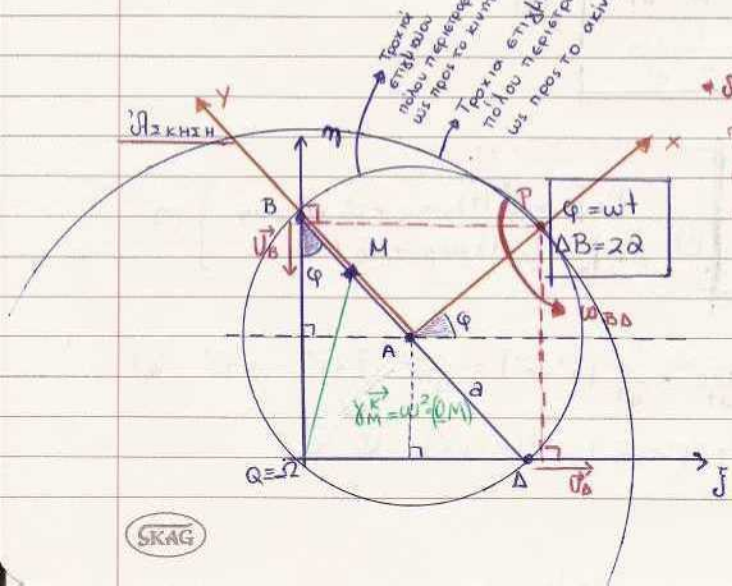
$$\left.\begin{aligned} \gamma_\xi &= \frac{d^2\xi_A}{dt^2} - \varepsilon(\eta-\eta_A) - \omega^2(\xi-\xi_A) \\ \gamma_\eta &= \frac{d^2\eta_A}{dt^2} + \varepsilon(\xi-\xi_A) - \omega^2(\eta-\eta_A) \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Για το στιγμιαίο πόλο περιστροφής

$$\left.\begin{aligned} \gamma_\xi = 0 \\ \gamma_\eta = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \xi_Q &= \xi_A - \frac{\ddot{\eta}_A(t)\,\varepsilon - \ddot{\xi}_A(t)\,\omega^2}{\varepsilon^2+\omega^4} \\ \eta_Q &= \eta_A + \frac{\ddot{\xi}_A(t) + \ddot{\eta}_A(t)\,\omega^2}{\varepsilon^2+\omega^4} \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

$$(6) \Longrightarrow \left.\begin{aligned} \gamma_x &= \gamma_A\big|_x - \varepsilon y - \omega^2 x \\ \gamma_y &= \gamma_A\big|_y + \varepsilon x - \omega^2 y \end{aligned}\right\} \quad 10$$

$$\left.\begin{aligned} \gamma_A\big|_x &= \ddot{\xi}_A\cos\varphi + \ddot{\eta}_A\sin\varphi \\ \gamma_A\big|_y &= -\ddot{\xi}_A\sin\varphi + \ddot{\eta}_A\cos\varphi \end{aligned}\right\} \quad (11)$$



* Ανάλογα με τους περιορισμούς του φ οι κύκλοι δεν διαγράφονται ολόκληροι.

Αρκεί να προσδιορίσω τα $\xi_A(t)$, $\eta_A(t)$, $\varphi(t)$.

$\xi_A = a\sin\varphi = a\cdot\sin\omega t$

$\eta_A = a\cos\varphi = a\cos\omega t$

$\varphi(t) = \omega t$

Παίρνω τον τύπο για το ξ_M.

$\xi_M = \xi_A + x\cos\varphi - y\sin\varphi$

$\eta_M = \eta_A + x\sin\varphi + y\cos\varphi$.

• Το $M(x,y) = M(0,y)$ αφού βρίσκεται στον x.

Άρα $\xi_M = \xi_A + 0 - y\sin\varphi = \xi_A - y\cdot\sin\varphi = (a-y)\sin\omega t. = \xi$

$\eta_M = \eta_A + 0 + y\cos\varphi = \eta_A + y\cos\varphi = (a+y)\cos\omega t. = \eta$

• Πρέπει να βρω την τροχιά κίνησης του M

$$\left.\begin{aligned}\frac{\xi}{a-y} &= \sin\omega t\\ \frac{\eta}{a+y} &= \cos\omega t\end{aligned}\right\}\quad \boxed{\frac{\xi^2}{(a-y)^2} + \frac{\eta^2}{(a+y)^2} = 1}$$

$(\xi,\eta) \Rightarrow$ προβολές στο ακίνητο σύστημα

$y \Rightarrow$ Η συντεταγμένη του τυχαίου M (γνωστό).

Εκφράζω τη θέση του P ως προς τα 2 συστήματα αναφοράς

1] Κινητή πολική τροχιά

2] ~~[illegible]~~ ~~[illegible]~~. Σταθερή πολική τροχιά

1] Ακίνητο σύστημα.

$$\left.\begin{aligned}\xi_P &= \xi_A - \frac{1}{\omega}\frac{d\eta_A}{dt} = 2a\sin\omega t\\ \eta_P &= \eta_A + \frac{1}{\omega}\frac{d\xi_A}{dt} = 2a\cos\omega t\end{aligned}\right\}\quad \frac{\xi_P^2}{4a^2} + \frac{\eta_P^2}{4a^2} = 1 \Rightarrow \boxed{\xi_P^2 + \eta_P^2 = 4a^2}$$

Κινητό σύστημα

$$x_P = \frac{-U_A|_y}{\omega} = \dots = a \sin 2\omega t$$

$$y_P = \frac{U_A|_x}{\omega} = \dots = a \sin 2\omega t$$

Αφού $U_A|_x = \xi_A^{\cdot}(t) \cos\varphi + \eta_A^{\cdot}(t) \sin\varphi$

$$U_A|_y = -\xi_A^{\cdot}(t) \sin\varphi + \eta_A^{\cdot}(t) \cos\varphi$$

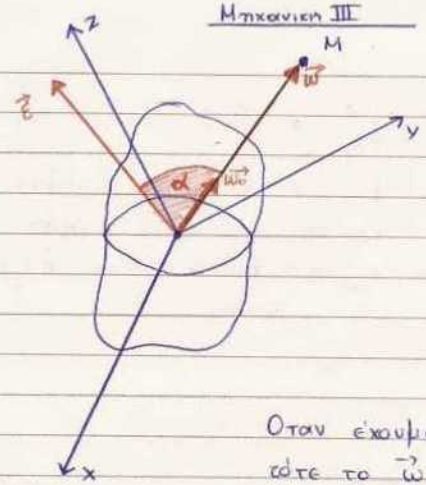
Άρα $\boxed{x_P^2 + y_P^2 = a^2}$

Συντεταγμένες του συνν. πόλου επιτάχ. $\left\{ \begin{array}{l} \xi_Q = \dots = 0 \\ U_Q = \dots = 0 \\ \text{Ομαλή} \quad Q \equiv \Omega \end{array} \right\}$ • Προβολή του στιγμιαίου πόλου επιτάχυνσης $\rightarrow (0,0,0)$ άρα συμπίπτει με το Ω.

$$\varepsilon\varphi\mu = \varepsilon/\omega = 0 \rightarrow \boxed{\mu = 0}$$

Αφού το $Q \equiv \Omega$ η $\overrightarrow{\gamma_M}$ είναι προς το Ω από το M.

Μηχανική ΙΙΙ



$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega_0}\cdot\omega\right) =$$

$$\boxed{\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega_0}}{dt}\omega + \vec{\omega_0}\frac{d\omega}{dt}} \quad (1)$$

Οταν έχουμε περιστροφή γύρω από ένα Μ σημείο τότε το $\vec{\omega}$ και $\vec{\varepsilon}$ σχηματίζουν μία γωνία α.

$$\vec{U} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

Άρα $$\boxed{\underbrace{(\omega_y z - \omega_z y)}_{U_x}\vec{i} + \underbrace{(\omega_z x - \omega_x z)}_{U_y}\vec{j} + \underbrace{(\omega_x y - \omega_y x)}_{U_z}\vec{k} = \vec{U}(t)} \quad (2)$$

$$|\vec{U}| = \sqrt{U_x^2 + U_y^2 + U_z^2}\,.$$

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{U}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$$

Επειδή $\vec{\alpha}\times(\vec{\beta}\times\vec{\gamma}) = \vec{\beta}(\vec{\alpha}\cdot\vec{\gamma}) - \vec{\gamma}(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta})$

Τότε:

$$\vec{\gamma} = \vec{\varepsilon}\times\vec{r} + \vec{\omega}(\vec{\omega}\cdot\vec{r}) - \vec{r}\cdot\omega^2$$

Αν το γ το προβάλλω στους x, y, z έχω:

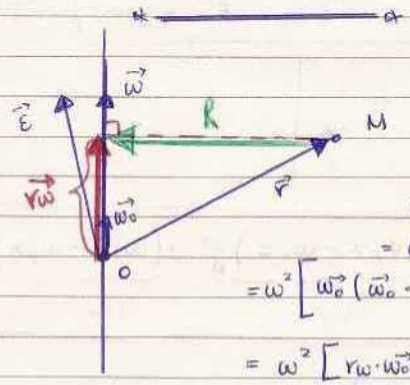
$$\gamma_x = \varepsilon_y z - \varepsilon_z y + \omega_x(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 x\,.$$
$$\gamma_y = \varepsilon_z x - \varepsilon_x z + \omega_y(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 y\,.$$
$$\gamma_z = \varepsilon_x y - \varepsilon_y x + \omega_z(\omega_x x + \omega_y y + \omega_z z) - \omega^2 z\,.$$

$$|\vec{\gamma}| = \sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2}\,.$$

Για να βρώ αυτά, έχοντας την $\begin{vmatrix} i & j & k \\ \varepsilon_x & \varepsilon_y & \varepsilon_z \\ x & y & z \end{vmatrix}$ → Εξετασμένο σημείο

και διαγράφω την 1η γραμμη και την αντιστοιχη στηλη κάθε φορά και βρίσκω την ορίζουσα που απομένει βάζοντας πρόσημα ανάλογα με τη θέση της ορίζουσας.

(χια το $\vec{\varepsilon}\times$.)



αν είχα επιπεδη κίνηση, (περιφερειακή δύναμη από αίρωνα) τότε $\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \omega^2 \vec{R}$.

$$\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) =$$

$$\vec{\omega}_0\,\omega\times(\vec{\omega}_0\cdot\omega\times\vec{r}) =$$

$$= \omega^2\,\vec{\omega}_0\times(\vec{\omega}_0\times\vec{r}) =$$

$$= \omega^2\left[\vec{\omega}_0(\vec{\omega}_0\cdot\vec{r}) - \vec{r}\underbrace{(\vec{\omega}_0\cdot\vec{\omega}_0)}_{1}\right] =$$

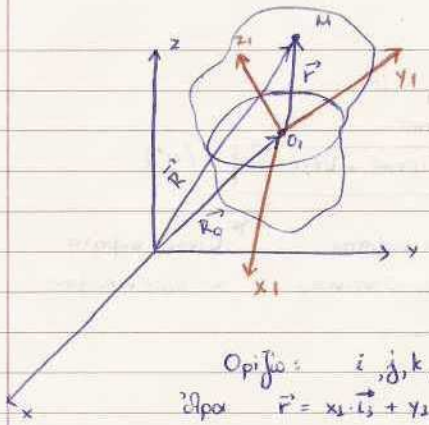
$$= \omega^2\left[r\omega\cdot\vec{\omega}_0 - \vec{r}\right] = \omega^2\vec{R}$$

$\vec{U} = \vec{\omega}\times\vec{r} = 0$ αφού πόλος περιστροφής

Άρα $U_x = U_y = U_z = 0$

Και εύκολα με τη σχέση ② προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις

$$\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}.$$



Ορίζω: $i, j, k,\ i_1, j_1, k_1$

Άρα $\vec{r} = x_1 \cdot \vec{i_1} + y_1 \cdot \vec{j_1} + z_1 \cdot \vec{k_1}$ (2)

• Η απόλυτη απόσταση ως προς το ακίνητο : $\vec{R} = \vec{R_0} + \vec{r}$ (1)

$\vec{R}$ → Απόσταση σχετική

$\vec{R_0}$ → Απόσταση των 2 συστημάτων

• Παραγωγίζω την (1) : $\underbrace{\frac{d\vec{R}}{dt}}_{U_A} = \underbrace{\frac{d\vec{R_0}}{dt}}_{U_0} + \frac{d\vec{r}}{dt}$

U_0 → Ταχύτητα O_1 ως προς το ακίνητο

U_A → Απόλυτη ταχύτητα ως προς το ακίνητο

Ισχύει $\frac{d\vec{r}}{dt} \overset{(2)}{=} \frac{d}{dt}\left[x_1 \cdot \vec{i_1} + y_1 \cdot \vec{j_1} + z_1 \cdot \vec{k_1}\right]$. Επειδή το σύστημα δεν είναι σταθερό πρέπει να παραγωγίσω τα $\vec{i_1}, \vec{j_1}, \vec{k_1}$ ως προς το ακίνητο σύστημα.

Άρα $\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x_1}(t) \cdot \vec{i_1} + \frac{d\vec{i_1}}{dt} x_1(t) + \dot{y_1}(t) \cdot \vec{j_1} + \frac{d\vec{j_1}}{dt} y_1(t) + \dot{z_1}(t)\, \vec{k_1} + \frac{dk_1}{dt} z_1(t)$

Αν θεωρήσω το $\vec{i_1}$ διάνυσμα τότε σύμφωνα με τον Euler: $\frac{d\vec{i_1}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i_1}$ και $\frac{d\vec{j_1}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j_1}$ και $\frac{d\vec{k_1}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k_1}$.

Άρα $\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x_1}(t)\, \vec{i_1} + (\vec{\omega} \times \vec{i_1})\, x_1(t) + \dot{y_1}(t)\, \vec{j_1} + y_1(t) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{j}) + \dot{z_1}(t)\, \vec{k_1} + z_1(t) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{k_1})$

$\Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = \left[\dot{x_1}(t)\, \vec{i_1} + \dot{y_1}(t)\, \vec{j_1} + \dot{z_1}(t)\, \vec{k_1}\right] + \vec{\omega} \times \underbrace{\left(x_1(t)\, \vec{i_1} + y_1(t)\, \vec{j_1} + z_1(t)\, \vec{k_1}\right)}_{\vec{r}\ (\text{λόγω της (2)})}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{U_{\sigma\chi}} + \vec{\omega} \times \vec{r}}$ (3)

$U_{\sigma\chi}$ → $U_{\sigma\chi\varepsilon\tau\iota\kappa\acute{o}}$

Αν το σώμα ήταν ακίνητο ως προς την περιστροφή τότε $\vec{\omega} \times \vec{r} = 0$.

→ Κίνηση O_1 ως προς O.

Άρα $\quad U_{\text{απολυτο}} = \underbrace{\vec{U_0} + \vec{\omega}\times\vec{r}}_{U_{\text{μετοχικό}}} + \underbrace{\vec{U_{6x}}}_{U_{\text{σχετικό}}} \quad (4)$

Άρα : $\boxed{U_{\text{απολυτη ως προς το ακίνητο}} = U_{\text{μετοχικό}} + U_{\text{σχετικό}}} \quad (4')$

Κίνηση σώματος ως προς το ακίνητο

Κίνηση σώματος ως προς κινούμενο

* ——— *

Επιτάχυνση

Προχωράω την 4 :

$$(4) \xrightarrow{d/dt} \underbrace{\frac{dU_A}{dt}}_{\vec{\gamma}_{\text{απολυτο}}} = \underbrace{\frac{d\vec{U_0}}{dt}}_{\vec{\gamma}_0} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r}) + \frac{d\vec{U_{6x}}}{dt}$$

$$* \quad \frac{d(\vec{\omega}\times\vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt} \overset{(3)}{=} \vec{\varepsilon}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times[\vec{\omega}\times\vec{r} + \vec{U_{6x}}] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d(\vec{\omega}\times\vec{r})}{dt} = \vec{\varepsilon}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + \vec{\omega}\times\vec{U_{6x}} \quad (5)$$

$$* \quad \frac{d\vec{U_{6x}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}_1\cdot\vec{i_1} + \dot{y}_1\vec{j_1} + \dot{z}_1\vec{k_1}\right) =$$

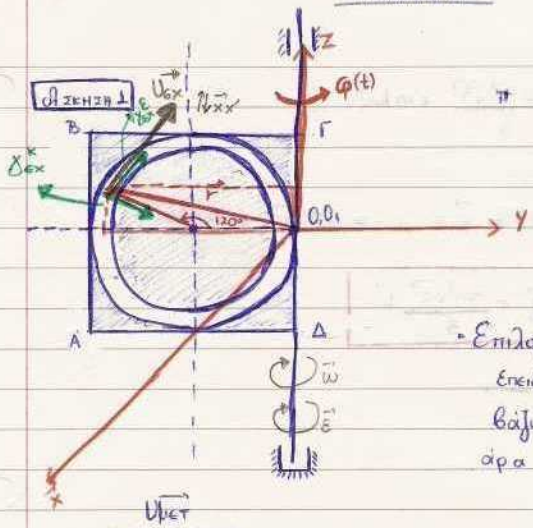
$$= \ddot{x}_1\vec{i_1} + \dot{x}_1\underbrace{\frac{d\vec{i_1}}{dt}}_{\vec{\omega}\times\vec{i_1}} + \ddot{y}_1\vec{j_1} + \dot{y}_1\underbrace{\frac{d\vec{j_1}}{dt}}_{\vec{\omega}\times\vec{j_1}} + \ddot{z}_1\vec{k_1} + \dot{z}_1\underbrace{\frac{d\vec{k_1}}{dt}}_{\vec{\omega}\times\vec{k_1}} =$$

$$= \underbrace{\left[\ddot{x}_1(t)\vec{i_1} + \ddot{y}_1(t)\vec{j_1} + \ddot{z}_1(t)\vec{k_1}\right]}_{\vec{\gamma_{6x}}} + \vec{\omega}\times\underbrace{\left(\dot{x}_1\vec{i_1} + \dot{y}_1\vec{j_1} + \dot{z}_1\vec{k_1}\right)}_{\vec{U_{6x}}}.$$

$$\boxed{\frac{d\vec{U_{6x}}}{dt} = \gamma_{6x} + \vec{\omega}\times U_{6x}} \quad (6)$$

Άρα $\quad \vec{\gamma_{\text{ΑΠΟΛΥΤΗ}}} = \underbrace{\vec{\gamma_0} + \vec{\varepsilon}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}_{\vec{\gamma_{\text{ΜΕΤ}}}} + \underbrace{\vec{\gamma_{6x}}}_{\vec{\gamma_{6x}}} + \underbrace{2(\vec{\omega}\times\vec{U_{6x}})}_{\vec{\gamma_{\text{cor}}}} \quad (7)$

$$\vec{\gamma_A} = \vec{\gamma_{\text{ΜΕΤ}}} + \vec{\gamma_{6x}} + \vec{\gamma_{\text{cor}}}$$



$\varphi(t) = 3t - 0,5t^3$ (περιστροφή πλαισίου)

$s(t) = 40\pi\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)$ cm

↳ κίνηση μπίλιας μέσα στο δακτύλιο

$R = 30$cm

• Επιλογή κινούμενου συστήματος.

Επειδή έχω σταθ. άξονα περιστροφής βάζω τον z_1 πάνω στον z.

άρα $O_1 \equiv O$. Επειδή $O_1 \equiv O \rightarrow \vec{U}_O = \vec{\gamma}_O = \vec{0}$.

$$\vec{U}_A = \vec{U}_O + \underbrace{\vec{\omega}\times\vec{r}}_{\vec{U}_{\varphi\varepsilon\sigma\tau}} + \vec{U}_{Gx}$$

$$\vec{\gamma}_A = \vec{\gamma}_O + \vec{\varepsilon}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + \vec{\gamma}_{Gx} + 2(\vec{\omega}\times\vec{U}_{Gx})$$

• Η απόσταση του M από το $O_1 \longrightarrow \vec{r}_1 = \vec{r}$.

* $s(t)\big|_{t=2sec} \Rightarrow 40\pi\cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) = 20\pi$ cm , $\varphi(t)\big|_{t=2sec} = 6 - \frac{1}{2}\cdot 8 = 2$

Μετατρέπω τα rad σε μοίρες $\longrightarrow \alpha^\circ = 120^\circ$

* $\dot{\varphi}(t)\big|_{t=2sec} \longrightarrow = -3\,sec^{-1} \longrightarrow$ Άρα η $\vec{U} \uparrow\downarrow \vec{\varphi}(t)$

* $\ddot{\varphi}(t)\big|_{t=2sec} \longrightarrow = -6\,sec^{-1}$

Αν η μπίλια ήταν ακίνητη και κινούταν μόνο το πλαίσιο.

$$\vec{U}_{\varphi\varepsilon\sigma\tau} = \vec{\omega}\times\vec{r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & -45 & \underbrace{15\sqrt{3}}_{\frac{30\sqrt{3}}{2}} \end{vmatrix} = \cdots = \underbrace{-135\vec{i}}_{\text{Μεταφορική συνιστώσα}}$$

$$\vec{U_{ex}} = \dot{s}(t)\Big|_{t=2} = \dots = -\frac{10\pi^2\sqrt{3}}{3} \text{ cm/sec}$$

Προβάλλω την $\vec{U_{ex}}$ στον y, z.

Άρα $\vec{U_{ex}} = |\vec{U_{ex}}| \cdot \cos 30^\circ \cdot \vec{j} + |\vec{U_{ex}}| \cdot \sin 30^\circ \cdot \vec{k} = \dots = 5\pi^2\vec{j} + \frac{5\pi^2\sqrt{3}}{3}\vec{k}$

Άρα $\boxed{\vec{U_{\text{ΑΠΟΛΥΤΟ}}} = -135\vec{i} + 5\pi^2\vec{j} + \frac{5\pi^2\sqrt{3}}{3}\vec{k}}$

$\boxed{\gamma \text{ (Επιτάχυνση)}}$

$\vec{\gamma_0} = 0$

$$\vec{\gamma^{\varepsilon}_{\text{ΜΕΤ}}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & -45 & 15\sqrt{3} \end{vmatrix} = \dots = -270\vec{i}.$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{\varepsilon} \times \vec{r} &= -270\vec{i} \\ \vec{\omega} \times \vec{r} &= -135\vec{i} \end{aligned}\right\} \text{ Μ} \rightarrow \text{Επιταχυνόμενη κίνηση.}$$

$$\vec{\gamma^{\varepsilon}_{\text{ΜΕΤ}}} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\omega} \times \vec{U_{\text{ΜΕΤ}}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -3 \\ -135 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \dots = 405\vec{j}.$$

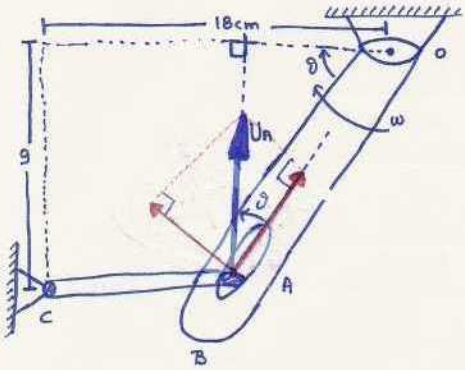
$\vec{\gamma_{ex}} \Rightarrow$ Λεγόμενη Επιτάχυνση (αλλά μπορεί να μην $\exists$). Η κεντρομόλος είναι σίγουρα $\exists$.

$$\vec{\gamma_{ex}} = \vec{\gamma^{\varepsilon}_{ex}} + \underset{(\vec{r})}{\vec{\gamma^{k}_{ex}}} \Rightarrow \vec{\gamma^{\varepsilon}_{ex}}\Big|_{t=2\text{sec}} = -\frac{5\pi^3}{9} \text{ cm/sec}^2.$$

και $\left|\vec{\gamma^{k}_{ex}}\right|_{t=2\text{sec}} = \frac{|\vec{U_{ex}}^2|}{R} \Rightarrow \vec{\gamma^{k}_{ex}} = \frac{\vec{U_{ex}}^2}{R} = \sin 30^\circ \vec{j} - \frac{\vec{U_{ex}}^2}{r}\cos 30^\circ \vec{k}$

$\Rightarrow \vec{\gamma^{k}_{ex}} = \dots$

$$\vec{\gamma_{cor}} = 2(\vec{\omega} \times \vec{U_{\text{ΕΧΕΤ}}}) = 2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & -3 \\ 5\pi^2 & \frac{5\pi^2\sqrt{3}}{3} & 0 \end{vmatrix} = \dots = 30\pi^2\vec{i}.$$



Σώμα Α του συνδέσμου ΑΒ υπόκειται στον περιορισμό να κινείται στη σχισμή του περιστρεφόμενου συνδέσμου ΒΟ. Η γων. ταχύτητα του ΒΟ είναι ω=2 rad/sec σταθερή. Για θ=45° το ΑΒ είναι οριζόντιο. ΑΒ=9 cm

i] U_A σχετικά με τη σχισμή του περιστρεφόμενου συνδέσμου ΒΟ

ii] Η γωνιακή ταχύτητα της ΑΒ.

iii] Η επιτάχυνση του Α σχετικά με τη σχισμή του περιστρεφόμενου συνδέσμου ΒΟ

Λύση

i] $\underline{V_A} = \underline{V_{μετοχική}} + \underline{V_{σχετική}}$

$\underline{V_{μετοχική}} = \omega(AO) = 2(AO) = 2\frac{\frac{9}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 18\sqrt{2}$ cm/sec

εφ.45° $= \frac{U_{σx}}{U_{μετ}} \Rightarrow \underline{U_{σx}} = \frac{36}{\sqrt{2}}$ εφ.45 $= 18\sqrt{2}$ cm/sec

$\Rightarrow V_{σχετική} = V_{μετ} = 18\sqrt{2}$ cm/sec

$V_A = \sqrt{U_{σx}^2 + V_{μετ}^2} = \sqrt{18^2\sqrt{2}^2 + 18^2\sqrt{2}^2} = \sqrt{2\cdot 18^2\sqrt{2}^2} = 18\sqrt{2}\sqrt{2} = 18\cdot 2 = 36$ cm/sec.

ii] $\omega_{AC} = \frac{V_A}{(AC)} = \frac{36}{9} = 4$ rad/sec

iii] $\underline{\gamma_A} = \underline{\gamma_{μ}} + \underline{\gamma_{σx}} + \underline{\gamma_{cor}}$. $\boxed{\text{Δίνεται } a = 32\,\text{sec}^{-2}}$

$\underline{\gamma_A} = \underline{\gamma_A^{κ}} + \underline{\gamma_A^{ε}}$

$\gamma_A^{κ} = \omega_{AC}^2 (AC) = 16\cdot 9 = 144$ cm/sec^2.

$\gamma_A^{ε} = a_{AC} (AC) = 9\cdot 32 = 288$ cm/sec^2.

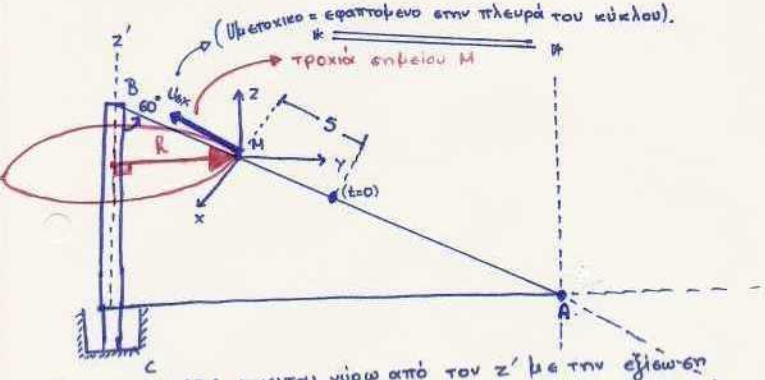
Μηχανική III

$\gamma_\mu^\kappa = \omega^2 (OP) = 2^2 (OP) = 2^2 \cdot 9\sqrt{2} = 36\sqrt{2}$

$\gamma_\mu^\varepsilon = \boxed{\alpha}(OP) = \dot{\omega}(OP) = 0$, αφού $\omega = ct$

→ γωνιακή επιτάχυνση

$\gamma_{cor} = 2\omega \times U_{\varepsilon x} = 2\omega \cdot V_{\varepsilon x} = 2 \cdot 2 \cdot 18\sqrt{2} = 72\sqrt{2}$ cm/sec².



Το τρίγωνο ABC κινείται γύρω από τον z' με την εξίσωση
$\varphi = 10t - 2t^2$

Υλικό σημείο Μ κινείται πάνω στην AB με την εξίσωση $\xrightarrow{f}$ $f = \alpha\cos\left(\frac{\pi}{3}t\right)$

i] Η απόλυτη επιτάχυνση του Μ για $t = 2$sec

$AB = 2\alpha = 20$ cm

$C\hat{O}A = 60°$

ii] Για $t=0$ που είναι το Μ. →

Λύση

ii] Για $t=0$ → $f(0) = \alpha\cos\left(\frac{\pi}{3}\cdot 0\right) = \alpha = 10$ cm (από το μέσον του AB) ⇒ Αρχή του f → σημείο O το οποίο είναι στο $\frac{AB}{2}$.

i] Για $t=2$ → $f(2) = \alpha\cos\left(\frac{\pi}{3}\cdot 2\right) = -\alpha\frac{1}{2} = -\frac{\alpha}{2} = -5$ cm

$U_A = U_{\varepsilon x} + U_{\mu\varepsilon\tau}$

$U_{\varepsilon x} = \frac{df}{dt} = -\frac{\pi}{3}\alpha\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right) \xrightarrow{t=2sec} U_{\varepsilon x} = \frac{-5\pi\sqrt{3}}{3}$ cm/sec

$U_\mu = \omega \cdot h$

$\sin 60 = \frac{h}{5} \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 5 = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 10 - 4t$

$U_{\mu\varepsilon\tau} = (10-4t)\cdot\frac{5\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{2}$ cm/sec.

Άρα $|\vec{U_A}| = \sqrt{U_{\mu\varepsilon\tau}^2 + U_{\varepsilon x}^2} = \sqrt{\left(\frac{-5\pi\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (5\sqrt{2})^2} = \ldots$

Μηχανική III

$$\underline{\gamma_A} = \underline{\gamma_\mu} + \underline{\gamma_{6x}} + \underline{\gamma_c}$$

$$\underline{\gamma_{6x}} = \frac{dU_{6x}}{dt} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\pi^2}{9}\,\alpha\cos\left(\frac{\pi t}{3}\right) \xrightarrow{t=2sec} \gamma_{6x} = \frac{5\pi^2}{9}\ cm/sec^2.$$

$$\underline{\gamma_\mu} = \vec{\gamma_\mu^z} + \vec{\gamma_\mu^\varepsilon}$$

$$\vec{\gamma_\mu^z} = \omega^2 \cdot h = \overset{\omega(2)=2.}{2^2} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}\ cm/sec$$

$$\vec{\gamma_\mu^\varepsilon} = \varepsilon \cdot h = -10\sqrt{3}\ cm/sec^2$$

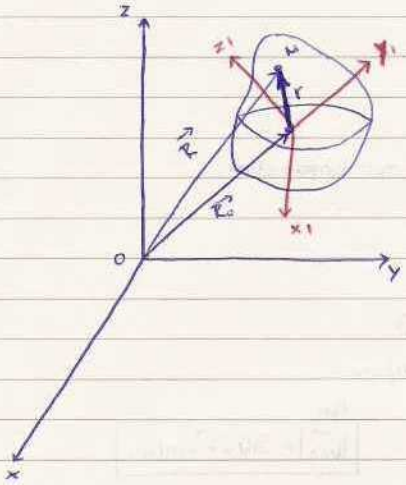
$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -4\ rad/sec^2$$

$$\vec{\gamma_c} = 2(\omega \times U_{6x}) = 2\,\omega \cdot U_{6x} \cdot \sin(\omega, \hat{U}_{6x}) = 10\pi\ cm/sec^2$$

* ——————————— *

23/11/2004
(1/3)

Μηχανική ΙΙΙ



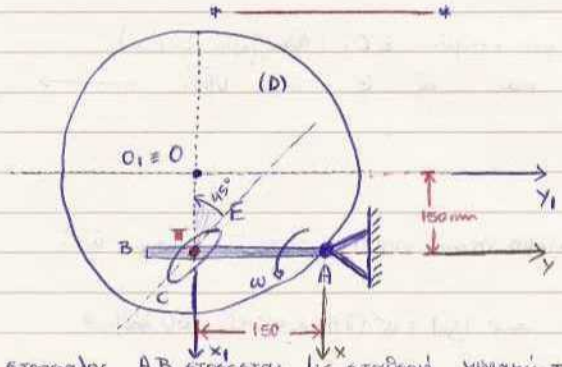
$$\vec{R} = \vec{R_0} + \vec{r} \quad (1)$$

$$\vec{U_A} = \vec{U_{\mu\varepsilon\tau}} + \vec{U_{\sigma\chi}} = \underbrace{\vec{U_0} + \vec{\omega}\times\vec{r}}_{U_{\mu\varepsilon\tau}} + \vec{U_{\sigma\chi}} \quad (2)$$

$$\vec{\gamma_A} = \underbrace{\vec{\gamma_{\mu\varepsilon\tau}}}_{} + \vec{\gamma_{\sigma\chi}} + \vec{\gamma_{cor}} = \vec{\gamma_0} + \underbrace{\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}_{\vec{\gamma}^{\kappa}_{\mu\varepsilon\tau}} +$$

$$+ \underbrace{\vec{\varepsilon}\times\vec{r}}_{\vec{\gamma}^{\varepsilon}_{\mu\varepsilon\tau}} + \vec{\gamma_{\sigma\chi}} + \underbrace{2(\vec{\omega}\times\vec{U_{\sigma\chi}})}_{\gamma_{cor}} \quad (3)$$

Το ω είναι η γ. τακ. περ. του σώματος ως προς το ακίνητο.



Ο στροφαλος AB στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα $\omega = 2 sec^{-1}$ και με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού. Ένας τύρος Π. που είναι προσαρμοσμένος πάνω στο AB μπορεί να κινείται στη σχισμή EC του κύκλου που στον άξονα Oz

i] Στη θέση που φαίνεται στο σχήμα $\omega_D = ;$, $\varepsilon_D = ;$ ως προς τον O_z.

- Δώρα: δίσκος (περιστροφική στο επίπεδο (κόνο))
- Υλικό σημείο προς μελέτη Π. (κυβικό σημείο)
- Προσπαθώ αν βολεύει να βάλω το $O_1 \equiv O$ χιαναμήν έχω:

Η απόλυτη κίνηση του Π είναι κυκλική τροχιά (αφού βρίσκεται στον AB)

$\vec{O_1\Pi} = \vec{r}$

$\vec{R} = \vec{A\Pi}$

$\vec{AO_1} = \vec{R_0}$

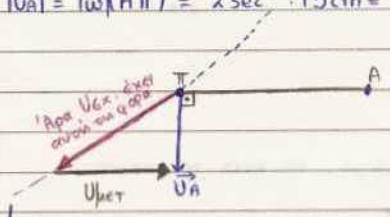
Ανεξάρτητα από τη μορφή του μηχανισμού.

$\vec{U_A} = \underbrace{\vec{U_{\mu\epsilon\tau}}}_{\vec{U_0} + \vec{\omega}_{\mu\epsilon\tau} \times \vec{r}} + \vec{U_{\sigma\chi}}$

$\vec{\omega}_{\mu\epsilon\tau} \neq \omega$ της σφήνας.

$\vec{U_0}$: η ταχύτητα του A ως προς το O

$|\vec{U_A}| = |\vec{\omega}|(A\Pi) = 2\,sec^{-1} \cdot 15\,cm = 30\,cm/sec.$



$\boxed{|\vec{U_{\sigma\chi}}| = 30\sqrt{2}\,cm/sec}$

Η $U_{\sigma\chi}$ θα είναι στη σχισμή ΕΣ. (δεν ξέρω φορά).

Επειδή $\vec{r}$ και $\vec{\omega}$ ⊙ τότε $\vec{U_{\mu\epsilon\tau}}$ ⟶

Σημείωση : Αν η σχισμή ήταν κυκλική τότε θα υπήρχε $\vec{\omega_{\sigma\chi}}$.

Επειδή ω = σταθ. $\Rightarrow |\vec{\gamma_A}| = \omega^2 \cdot (\Pi A) = 4 \cdot 15 = 60\,cm/sec^2$

Αλλά $\vec{\gamma_A} = \vec{\gamma_{\mu\epsilon\tau}} + \vec{\gamma_{\sigma\chi}} + \vec{\gamma_{\sigma\epsilon\tau}}$

κίνηση ως προς το δίσκο.

$\vec{\gamma_0}$: Ρυθμός μεταβολής της κίνησης του O ως προς το A.

$\vec{\gamma}^{\kappa}_{\mu\epsilon\tau} = \vec{\omega}_{\mu\epsilon\tau} \times (\vec{\omega}_{\mu\epsilon\tau} \times \vec{r}) \Rightarrow |\vec{\gamma}^{\kappa}_{\mu\epsilon\tau}| = |\vec{\omega}_{\mu\epsilon\tau}|^2 (O\Pi) = 60\,cm/sec^2$ } φορά από το σημείο στο κέντρο

$\vec{\gamma}^{\epsilon}_{\mu\epsilon\tau} \perp \vec{\gamma}^{\kappa}_{\mu\epsilon\tau}$

$\vec{\gamma_{\sigma\chi}} \Rightarrow$ πάνω στη σχισμή άρα (δεν ξέρω φορά)

$|\vec{\gamma_{\sigma\epsilon\tau}}| = |2(\vec{\omega} \times \vec{U_{\sigma\chi}})| = 2 \cdot 2 \cdot 30\sqrt{2} = 120\sqrt{2}$

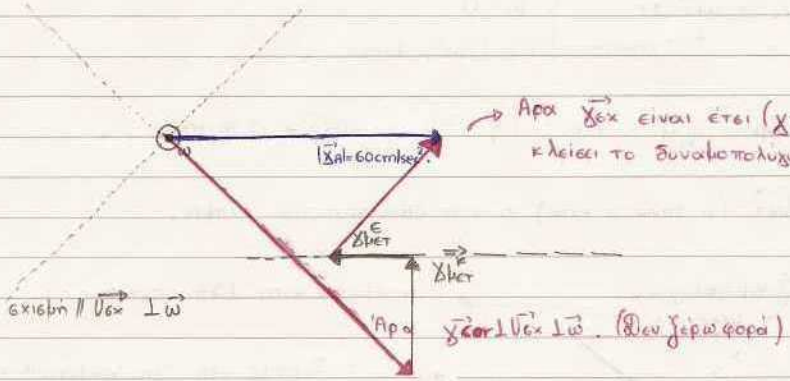
$\boxed{\vec{\gamma_{\sigma\epsilon\tau}} \perp \vec{\omega} \perp \vec{U_{\sigma\chi}}}$

$\boxed{U_{\sigma\chi} \parallel \text{σχισμή}}$

23/11/2004
(2/3)

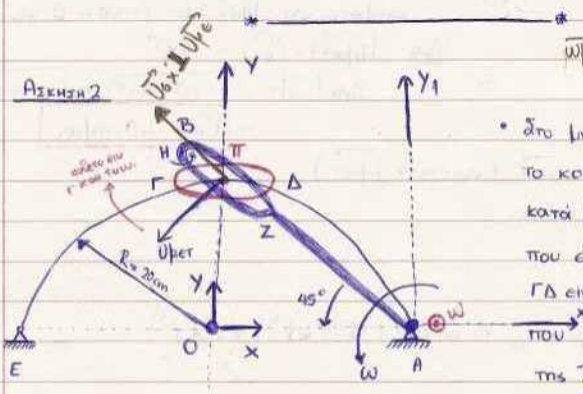
Μηχανική III

Δυναμοπολύγωνο για επιταχύνσεις.



$\vec{\omega}_{\sigma\upsilon\nu}$: ω που περιστρέφει το σώμα ως προς το ακίνητο Άρα εδώ $\vec{\omega}_{\sigma\upsilon\nu} = \vec{\omega}$ ασκήσεις

Άσκηση 2



• Στο μηχανισμό που φαίνεται στο σχήμα το κολάρο ΓΔ μπορεί να κινείται κατά μήκος του κυκλικού οδηγού ΑΕ. που έχει ακτίνα $R = 20cm$. Στο κολάρο ΓΔ είναι προσαρμοσμένος ένας πύρος Π, που μπορεί να κινείται κατα μήκος της ΖΗ του στροφάλου ΑΒ. Ο ΑΒ περιστρέφεται γύρω από το Α με $\omega = 1 sec^{-1}$.

Να υπολογιστεί η ταχύτητα και η επιτάχυνση του πύρου Π. όταν ο μηχανισμός έχει τη θέση του σχήματος

• Κομβικό σημείο : Π ⟹ Κολάρο ΓΔ στον κυκλικό οδηγό

• Θέτω $x_1 y_1 \hat{A}$ (κινούμενο) και $x y \hat{O}$ (ακίνητο

$\vec{R} = \vec{O\Pi}$

$\vec{R_0} = \vec{OA}$

$\vec{r} = \vec{A\Pi}$ (κινούμενο σύστημα – σημειακό σημείο).

κίνηση Π ως προς ακίνητο

$\vec{U_A} = \vec{U_{\mu\varepsilon\tau}} + \vec{U_{\varepsilon\varphi}}$

$\vec{U_0} + \vec{\omega_{\mu\varepsilon\tau}} \times \vec{r}$ (χωνετό) $\Big\}$ $\vec{U_0} = 0$, $|\vec{\omega_{\mu\varepsilon\tau}}| = |\vec{\omega}| = 1\,sec^{-1}$

Άρα $|\vec{U_{\mu\varepsilon\tau}}| = |\vec{\omega}_{\mu\varepsilon\tau} \times \vec{r}| = 1\,sec^{-1} \cdot \sqrt{R^2 + R^2} = 20\sqrt{2} \simeq 28{,}28\,cm/sec$

$\vec{U_{\varepsilon\varphi}}$ (ή πάνω ή κάτω) ⇒ στη διεύθυνση της εφαπτόμενης.

• Ξέρουμε από τη γεωμετρία του σχήματος ότι $\vec{U_{\mu\varepsilon\tau}} \perp \vec{U_{\varepsilon\varphi}}$ (επειδή $\theta = 45°$).

Άρα $|\vec{U_{\mu\varepsilon\tau}}| = |\vec{U_{\varepsilon\varphi}}| = 20\sqrt{2}$

Άρα $|\vec{U_A}| = \sqrt{(20\sqrt{2})^2 + (20\sqrt{2})^2} = \sqrt{2 \cdot 400 \cdot 2}$

⇒ $\boxed{|\vec{U_A}| = 40\,cm/sec}$

$|\vec{\omega_A}| = \dfrac{|\vec{U_A}|}{(\pi O)} = \dfrac{40}{20} = 2\,rad/sec.$

$\vec{\alpha_A} = \vec{\alpha_{\mu\varepsilon\tau}} + \vec{\alpha_{\varepsilon\varphi}} + \vec{\alpha_{\varepsilon\pi}}$

$\vec{\alpha_{\mu\varepsilon\tau}} = \vec{\alpha}^{\kappa}_{\mu\varepsilon\tau} + \vec{\alpha}^{\varepsilon}_{\mu\varepsilon\tau} \Rightarrow \vec{\alpha_0} = \vec{\alpha_0} + \vec{\omega_{\mu\varepsilon\tau}} \times (\vec{\omega_{\mu\varepsilon\tau}} \times \vec{r}) + \cancel{\vec{\varepsilon} \times \vec{r}}$

0 αφού $\vec{\omega_{\mu\varepsilon\tau}} = \vec{\omega} =$ σταθ.

$\vec{\alpha_0} = \vec{0}$

$\vec{\alpha}^{\kappa}_{\mu\varepsilon\tau} \Rightarrow \vec{\pi O}$ φορά και $|\vec{\alpha}^{\kappa}_{\mu\varepsilon\tau}| = 2^2(20) = 80\,cm/sec^2.$

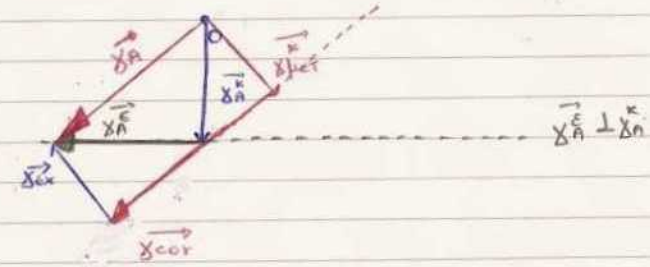
$\vec{\alpha}^{\varepsilon}_{\mu\varepsilon\tau} \perp \vec{\alpha}^{\kappa}_{\mu\varepsilon\tau}.$

$|\vec{\alpha_{\varepsilon\pi}}| = 2|\vec{\omega} \times \vec{U_{\varepsilon\varphi}}| = 56{,}57\,cm/sec^2.$ (Ξέρω φορά $\vec{\omega}$, $\vec{U_{\varepsilon\varphi}}$ και βρίσκω $\vec{\alpha_{\varepsilon\pi}}$ φορά)

Άρα φτιάχνω δυναμοπολύγωνο.

Μηχανική III

Δυναμοπολύγωνο

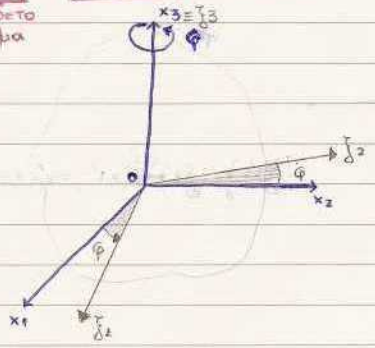


Μηχανική ΙΙΙ

$\boxed{O x_1 x_2 x_3 \ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}}$ (R) → $\boxed{O' x_1' x_2' x_3' \ \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}'}$ ⇒ δίψιατοδετο σύστημα.

Πρώτο περιστροφής

χώροδετο σύστημα



Διευθύνουντα συμπίπτουν

Περιστρέφω το σύστημα χύρω από x_3

Άρα $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \xrightarrow{(A)\varphi} (\vec{s_0}, \vec{t_0}, \vec{k})$

Άρα

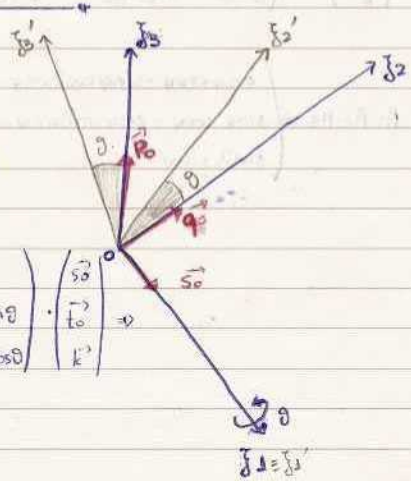
$$\begin{matrix} \vec{s_0} \\ \vec{t_0} \\ \vec{k} \end{matrix} = A_1 \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{i}' \\ \vec{j}' \\ \vec{k}' \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{matrix} \vec{s_0} \\ \vec{t_0} \\ \vec{k} \end{matrix} = \begin{pmatrix} i\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi + 0\vec{k}' \\ -\vec{i}'\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi + 0\vec{k}' \\ 0\vec{i}' + 0\vec{j}' + \vec{k}' \end{pmatrix}$$

Άρα $(x_1, x_2, x_3) \xrightarrow{(A_1)} (\zeta_1, \zeta_2, \underset{x_3}{\zeta_3})$

Περιστρέφω ως προς ζ_1

$(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) \xrightarrow{A_2(\vartheta)} (\underset{\zeta_1}{\zeta_1'}, \zeta_2', \zeta_3')$

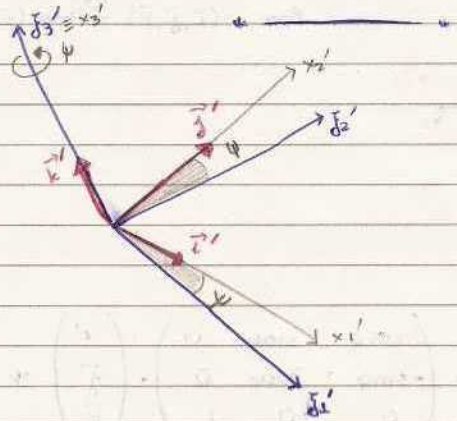


$$\begin{pmatrix} \vec{s_0} \\ \vec{q_0} \\ \vec{P_0} \end{pmatrix} = (A_2) \begin{pmatrix} \vec{s_0} \\ \vec{t_0} \\ \vec{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ 0 & -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \vec{s_0} \\ \vec{t_0} \\ \vec{k} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$= \vec{s_0}$

$= \cos\vartheta \cdot \vec{t_0} + \vec{k} \cdot \sin\vartheta$

$= -\sin\vartheta \cdot \vec{t_0} + \vec{k} \cos\vartheta.$



$$(\xi_1', \xi_2', \xi_3') \xrightarrow{A_3} (x_1', x_2', x_3')$$

$$\underline{A_{0a}} \begin{pmatrix} \vec{i}' \\ \vec{j}' \\ \vec{k}' \end{pmatrix} = A_3 \begin{pmatrix} \vec{s_0} \\ \vec{q_0} \\ \vec{p_0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{s_0} \\ \vec{q_0} \\ \vec{p_0} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \vec{i}' \\ \vec{j}' \\ \vec{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{s_0}\cos\psi + \vec{q_0}\sin\psi + 0\,\vec{p_0} \\ -\vec{q_0}\sin\psi + \vec{q_0}\cos\psi + 0\,\vec{p_0} \\ 0 \cdot \vec{s_0} + 0 \cdot \vec{q_0} + 1 \cdot \vec{p_0} \end{pmatrix}$$

$$R = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 = \begin{pmatrix} \cos\varphi \cdot \cos\psi - \sin\varphi \cos\vartheta \sin\psi & -\cos\varphi \sin\psi - \sin\varphi \cos\vartheta \cos\psi & \sin\varphi \cdot \sin\vartheta \\ \sin\varphi \cdot \cos\psi + \cos\varphi \cos\vartheta \sin\psi & -\sin\varphi \sin\psi + \cos\varphi \cos\vartheta \cdot \cos\psi & -\cos\varphi \cdot \sin\vartheta \\ \sin\vartheta \cdot \sin\psi & \sin\vartheta \cdot \cos\psi & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

$\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}\cdot\vec{i}$ και $\vec{\omega}_1' = \vec{\omega}\cdot\vec{i}'$

$\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}\cdot\vec{j}$ $\quad\quad$ $\vec{\omega}_2' = \vec{\omega}\cdot\vec{j}'$

$\vec{\omega}_3 = \vec{\omega}\cdot\vec{k}$ $\quad\quad$ $\vec{\omega}_3' = \vec{\omega}\cdot\vec{k}'$

Άρα $\vec{\omega}_1 = \left[\dot{\varphi}(t)\vec{k} + \dot{\vartheta}(t)\vec{s_0} + \dot{\psi}(t)\vec{k}'\right]\vec{i} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{\omega}_1 = \cancel{\dot{\varphi}(t)\vec{k}\cdot\vec{i}}^{\,0} + \dot{\vartheta}(t)\cdot\vec{s_0}\cdot\vec{i} + \dot{\psi}(t)\,\vec{k}'\cdot\vec{i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{\omega}_1 = \dot{\vartheta}(t)\left[\cos\varphi\cdot\vec{i} + \sin\varphi\cdot\vec{j}\right]\cdot\vec{i} + \dot{\psi}(t)\left[\vec{P_0}\right]\cdot\vec{i} \Rightarrow \ldots\ldots \Rightarrow$$

Αντικαθιστώ τις εκφράσεις που βρήκα παραπάνω στην

$$\boxed{\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{k} + \frac{d\vartheta}{dt}\cdot\vec{s_0} + \frac{d\psi}{dt}\cdot\vec{k}'}$$ $\Rightarrow$ δυνιστώμενη γωνιακή ταχύτητα

Άρα
$$\vec{\omega}_1 = \vec{\omega}\cdot\vec{i} = \dot{\vartheta}(t)\cos\varphi + \dot{\psi}(t)\cdot\sin\varphi\cdot\sin\vartheta$$
$$\vec{\omega}_2 = \vec{\omega}\cdot\vec{j} = \dot{\vartheta}(t)\cdot\sin\varphi - \dot{\psi}(t)\cdot\sin\varphi\cdot\cos\varphi$$
$$\vec{\omega}_3 = \vec{\omega}\cdot\vec{k} = \dot{\varphi}(t) + \dot{\psi}(t)\cos\vartheta$$

και
$$\vec{\omega}_1' = \vec{\omega}\cdot\vec{i}' = \dot{\varphi}(t)\sin\vartheta\cdot\sin\psi + \dot{\vartheta}(t)\cos\psi$$
$$\vec{\omega}_2' = \vec{\omega}\cdot\vec{j}' = \dot{\varphi}(t)\sin\vartheta\cdot\cos\psi - \dot{\vartheta}(t)\sin\psi$$
$$\vec{\omega}_3 = \vec{\omega}\cdot\vec{k}' = \dot{\varphi}(t)\cos\vartheta + \dot{\psi}(t)$$

Αν έχω το $Oxyz$ και έχω το σώμα με 3 διαδοχικές περιστροφές τότε ο στιγμιαίος άξονας έχει $\vec{U}' = \vec{0} \Rightarrow \vec{U} = \vec{\omega}\times\vec{r} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \quad U_x = U_y = U_z = 0.$$

$$\boxed{\frac{x}{\omega_x} = \frac{y}{\omega_y} = \frac{z}{\omega_z}}$$ Εξίσωση ευθείας: η χρονική στιγμή $t = t_0$ στην οποία ο άξονας περιστροφής είναι αυτός

Θέμα 1

Δίνεται σώμα και $\varphi(t) = 2t^2 + 3t$ γύρω από z

$\vartheta(t) = \pi/6$

$\psi(t) = 24t$

για $t = 1$ sec

$M(3,2,5) \longrightarrow (x_1, x_2, x_3)$

$\vec{\underline{\omega}}(\underline{\omega}_1, \underline{\omega}_2, \underline{\omega}_3)$

$\vec{\underline{\omega}}(\underline{\omega}_1', \underline{\omega}_2', \underline{\omega}_3')$

Ισχύει : $\vec{U} = \vec{\underline{\omega}} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \underline{\omega}_1 & \underline{\omega}_2 & \underline{\omega}_3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}$

$\vec{U} = \vec{\underline{\omega}}' \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ \underline{\omega}_1' & \underline{\omega}_2' & \underline{\omega}_3' \\ x_1' & x_2' & x_3' \end{vmatrix}$

Με $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Ισχύει $\vec{\underline{\omega}} = \dot{\varphi}(t)\vec{k} + \dot{\vartheta}(t)\vec{i_0} + \dot{\psi}(t)\vec{k}'$

και $\vec{\underline{\omega}} \cdot \vec{i} = \dot{\psi}(t)\sin\vartheta\sin\varphi + \dot{\vartheta}(t)\cos\varphi \Big|_{t=1} = \dots = -11,5\,\text{sec}^{-1}$

$\vec{\underline{\omega}} \cdot \vec{j} = -\dot{\psi}(t)\cos\varphi \cdot \sin\vartheta + \dot{\vartheta}(t)\sin\varphi \Big|_{t=1} = \dots = -3,41\,\text{sec}^{-1}$

$\vec{\underline{\omega}} \cdot \vec{k} = \dot{\psi}(t) \cdot \cos\vartheta + \dot{\varphi}(t) \Big|_{t=1} = \dots = 27,8\,\text{sec}^{-1}.$

$\underline{\omega}_1$, $\underline{\omega}_2$, $\underline{\omega}_3$ } Αρχικό σύστημα

$\underline{\omega}_1' = \vec{\underline{\omega}} \cdot \vec{i}' = \dot{\varphi}(t)\sin\vartheta\sin\psi + \dot{\vartheta}(t)\cos\psi \Big|_{t=1} = \dots = -3,17\,\text{sec}^{-1}$

$\underline{\omega}_2' = \vec{\underline{\omega}} \cdot \vec{j}' = \dot{\varphi}(t)\sin\vartheta\cos\psi - \dot{\vartheta}(t)\sin\psi \Big|_{t=1} = \dots = 1,48\,\text{sec}^{-1}$

$\underline{\omega}_3' = \vec{\underline{\omega}} \cdot \vec{k}' = \dot{\varphi}(t)\cos\vartheta + \dot{\psi}(t) \Big|_{t=1} = \dots = 3,01\,\text{sec}^{-1}$

$\underline{\omega} = \sqrt{\underline{\omega}_1^2 + \underline{\omega}_2^2 + \underline{\omega}_3^2} = \sqrt{\underline{\omega}_1'^2 + \underline{\omega}_2'^2 + \underline{\omega}_3'^2} = \dots = 30,3\,\text{sec}^{-1}$

και τα διευθύνοντα συνημίτονα $\cos(\widehat{\vec{\underline{\omega}}, \vec{x}_1'}) = \dots = \dfrac{\underline{\omega}_1'}{\underline{\omega}} = -0,105$

$\cos(\widehat{\vec{\underline{\omega}}, \vec{x}_2'}) = \dots = \dfrac{\underline{\omega}_2'}{\underline{\omega}} = 0,049$

$\cos(\widehat{\vec{\underline{\omega}}, \vec{x}_3'}) = \dots = \dfrac{\underline{\omega}_3'}{\underline{\omega}} = 0,993$

Μηχανική III

$$\vec{U} = \begin{vmatrix} \vec{i}' & \vec{j}' & \vec{k}' \\ \omega_1' & \omega_2' & \omega_3' \\ x_1' & x_2' & x_3' \end{vmatrix} = \dots = \underbrace{-52{,}8\,\vec{i}'}_{U_{x'}} + \underbrace{106{,}2\,\vec{y}'}_{U_{y'}} \underbrace{-10{,}7\,\vec{k}'}_{U_{z'}}.$$

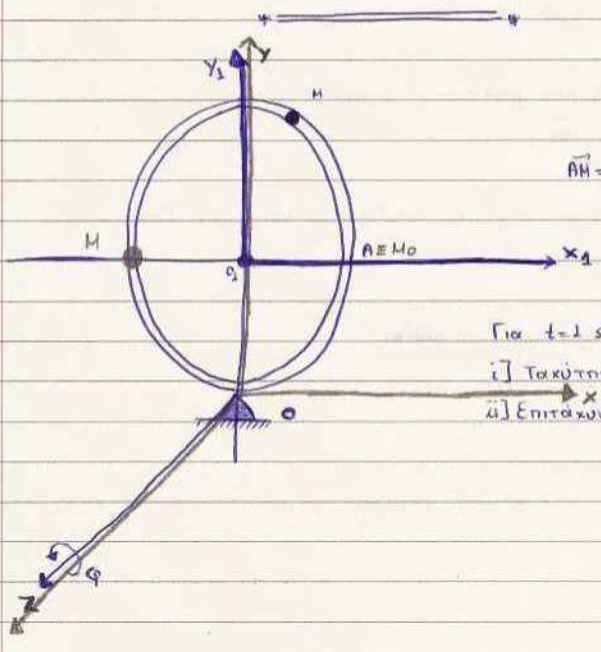
$$\vec{\gamma}_M\Big|_{t=1} = \underbrace{\vec{\varepsilon}\times\vec{r}}_{\vec{\gamma}_M^{\,R}} + \underbrace{\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}_{\vec{\gamma}_M^{\,E}}$$

Παραγωγίζω την έκφραση $\vec{\omega} = \underbrace{\dot{\vec{\varphi}}(t)\vec{k} + \dot{\vec{\vartheta}}(t)\cdot\vec{t_0} + \dot{\vec{\psi}}(t)\vec{k}'}$

Οι παράγωγοι αυτών δεν είναι οπωσδήποτε 0 αφού το σωματίδιο κινείται.

$-0{,}012$

$0{,}015\,79\,737$



$\varphi(t) = 2t - 0{,}3t^2$

$\overrightarrow{AM} = s(t) = 75\pi(0{,}1 + 0{,}3t^3)$

$(O_1A) = 30\,cm$

Για $t=1$ sec

i] Ταχύτητα και

ii] Επιτάχυνση του Μ.

- Εξαθαρίζουμε μεταφορική, σχετική και απόλυτη κίνηση
- Η περιστροφή γίνεται ως προς O άρα θέτω x σ' αυτό το επίπεδο, y και συμπίπτει με το y_1 και z.
- Για $t=0 \rightarrow \vec{AM}=0 \longrightarrow M_0 \equiv A$

Για $t=1 \rightarrow \vec{AM} = s(1) = \cdots = 30\pi$

Άρα $2\pi R \longrightarrow 360^\circ$

$30\pi \longrightarrow \alpha^\circ$

$2\pi R\alpha^\circ = 360 \cdot 30\pi \Rightarrow$

$\alpha^\circ = \dfrac{360 \cdot 30}{2R} = \cdots = 180^\circ.$

Παραγωγίζω την περιστροφή του σώματος $\varphi(t)$ και βρίσκω το $\vec{\omega}_{\text{περ}}$.

$\vec{R} = \vec{R_0} + \vec{r}$

Αν θέσω το κινούμενο στο O_1 τότε έχω $\vec{U_0}$

Αν -"- -"- -"- -"- O τότε δεν έχω $\vec{U_0}$

$\vec{U_{0x}} = \dot{s}(t)$ (Μεταβολή της μπιλιάρδου διαδρόμου

Άρα $\vec{v} = \vec{U_0} + \vec{\omega} \times \vec{r} + \vec{V_{0x}}$.

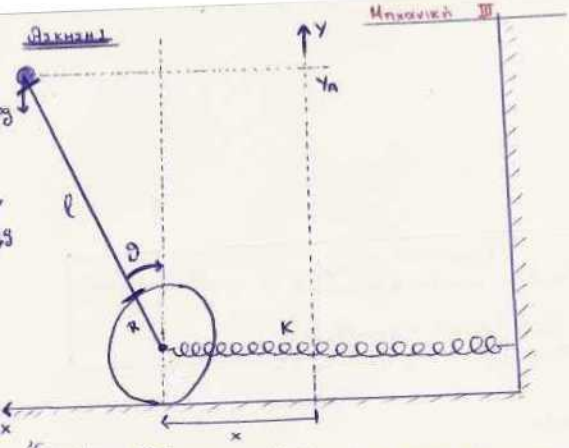
- Εφόσον η περιστροφή είναι στον z και το κινούμενο στο O_1.

τότε $\vec{r} = \vec{O_1O}$

$\vec{\varepsilon} = \ddot{\vec{s}}(t)$

$\vec{\gamma_{0x}} = 2$ συνιστώσες : $\underset{\omega^2 r}{\vec{\gamma}^{\kappa}_{0x}} + \underset{\dot{s}(t)}{\vec{\gamma}^{\varepsilon}_{0x}} =$

Ασκηση 1



Να βρεθεί η Θ.Ι του συστήματος

Έστω ότι η Θ.Ι του συστήματος είναι αυτή του εκτάτου. Άρα: $\delta W = 0$. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow -mg\,\delta y_A - K x_B\,\delta x_B$$

$$y_A = R + (\ell + R)\cos\vartheta \Rightarrow \delta y_A = -(R+\ell)\sin\vartheta\,\delta\vartheta$$

Βρίσκω το y_A, x_B και το παραγωγίζω.

$$x_B = x$$

$$x = R\vartheta$$

$$-mg[-(R+\ell)\sin\vartheta\,\delta\vartheta] - KR^2\vartheta\,\delta\vartheta = 0 \Rightarrow$$

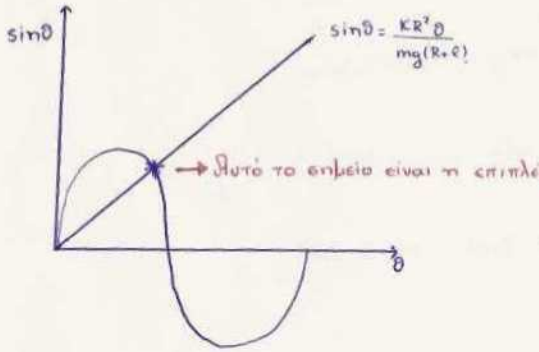
$$\Rightarrow [mg(R+\ell)\sin\vartheta - KR^2\vartheta]\delta\vartheta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow mg(R+\ell)\sin\vartheta = KR^2\vartheta \Rightarrow$$

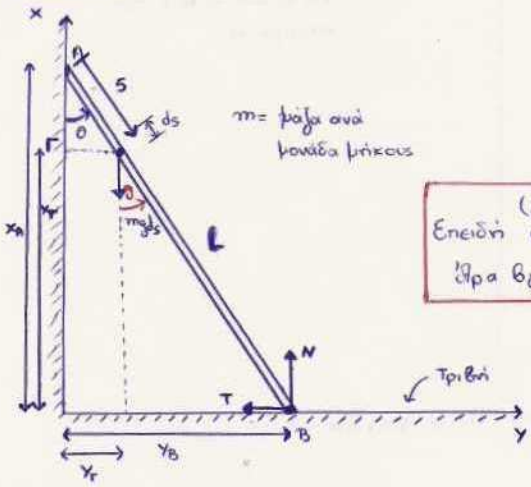
$$\boxed{\sin\vartheta = \frac{KR^2}{mg(R+\ell)}\vartheta}$$

* Η προφανής λύση αυτής είναι $\vartheta = 0$. Μπορώ να έχω μία επιπλέον λύση αν

$$\boxed{\frac{KR^2}{mg(R+\ell)}|\vartheta| < 1}$$



Θέμα 2



m= μάζα ανά μονάδα μήκους

(θεωρούμε)
Επειδή έχουμε εδώ $\theta.I \Rightarrow \sin\theta \cdot \delta\theta = \text{σταθ.}$
Άρα βγαίνει εξωαπότο $\int$.

• Έστω ότι η ράβδος ισορροπεί στη θέση του σχήματος

$$\boxed{\delta W = 0 \Rightarrow \delta W_{\text{βάρους}} - T\delta y_B = 0}$$

• Εξετάζοντας την στοιχειώδη μάζα $m.ds$ κ' το στοιχειώδες δυνατό έργο : $-mg\,ds\cdot\delta x_\Gamma$.

$$\left.\begin{aligned} x_\Gamma &= L\cos\theta - s\cos\theta \\ \cos\theta &= \frac{x_A}{L} \Rightarrow x_A = L\cos\theta \\ \cos\theta &= \frac{A\Gamma}{s} \Rightarrow A\Gamma = s\cos\theta \end{aligned}\right\} \quad \delta x_\Gamma = -L\sin\theta + s\sin\theta \Rightarrow \boxed{\delta x_\Gamma = (s-L)\sin\theta\delta\theta}$$

Άρα το στοιχειώδες έργο του βάρους $= -mg\delta s\cdot\delta x_\Gamma \left(= -(L-s)\sin\theta\delta\theta \right)$

$$\Rightarrow +mg\delta s(L-s)\sin\theta\delta\theta$$

$$W_{o\lambda} = \int_0^L +mg\delta s(L-s)\sin\theta\delta\theta = -\int_0^L mg(s-L)\sin\theta\,\delta s\delta\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_{o\lambda} = -mg\sin\theta\delta\theta\int_0^L (s-L)\delta s \Rightarrow W_{o\lambda} = -mg\sin\theta\delta\theta\left[\frac{s^2}{2} - Ls\right]_0^L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W_{o\lambda} = -mg\cdot\sin\theta\cdot\delta\theta\left(\frac{L^2}{2} - L^2\right) \Rightarrow W_{o\lambda} = -mg\cdot\sin\theta\delta\theta\,\frac{L^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{W_{o\lambda} = -mg\frac{L^2}{2}\sin\theta\delta\theta}$$

* Επίσης $T\,\delta y_B \Rightarrow$

$y_B = L \cdot \sin\theta \Rightarrow \delta y_B = L\cos\theta\,\delta\theta$

Άρα

$$\boxed{\delta W = 0 \Rightarrow \frac{mgL^2}{2}\sin\theta\,\delta\theta - T\,\delta y_B = 0} \Rightarrow \frac{mgL^2}{2}\sin\theta\cdot\delta\theta - T\cdot L\cos\theta\cdot\delta\theta = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{mgL^2}{2}\sin\theta\cdot\delta\theta - \mu \underset{mgL}{\underset{\downarrow}{N}}\cos\theta\cdot\delta\theta = 0 \Rightarrow \left[\frac{mgL^2}{2}\sin\theta - \mu mgL^2\cos\theta\right]\delta\theta = 0 \Rightarrow$$

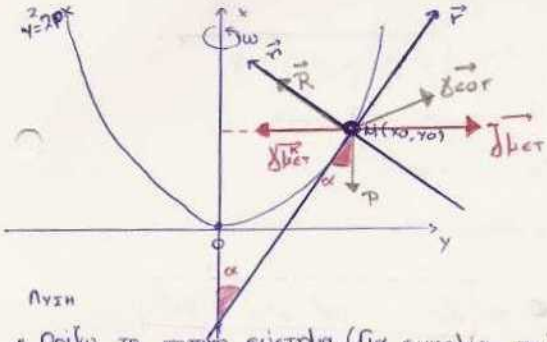
$$\Rightarrow mgL^2\delta\theta\left[\frac{\sin\theta}{2} - \cos\theta\right] = 0 \Rightarrow \frac{\sin\theta}{2} = \cos\theta \Rightarrow \boxed{\tan\theta = 2}$$

Αυτή πρέπει να είναι η θ για να υπάρχει ισορροπία.

Σύρμα παραβολικής μορφής $y^2 = 2px$ περιστρέφεται γύρω απ' τον άξονα x με σταθ. ω. Πάνω στο σύρμα φοριέται ο δακτύλιος Μ, ο οποίος μετακινείται πάνω. Αν δεν υπάρχουν τριβές, να υπολογιστούν:

i] Η ταχύτητα του δακτυλίου ως προς το σύρμα αν γνωρίζουμε ότι στην αρχική στιγμή $M(x_0, y_0)$, $U=0$

ii] Η ταχύτητα, αν στη θέση $O(0,0) \rightarrow U$ = οριζόντια και γνωστή



Λύση

- Ορίζω το τοπικό σύστημα. (Για ευκολία πράξεων τον βάζω στη διεύθυνση της ταχύτητας). (Εφαπτόμενη στην τροχιά)

- $\vec{J}_{μετ} = m\underbrace{\vec{\chi}_0}_{0} - m\underbrace{\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})}_{} - m\underbrace{\vec{\varepsilon}\times\vec{r}}_{0}$ (διότι $\vec{\omega}$ = σταθ.)

τείνει πάντα προς τον άξονα περιστροφής

Άρα $\vec{J}_{μετ} \uparrow\downarrow \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r})$.

- $\vec{J}_{cor} = -m\vec{\chi}_{cor} = -m\,2(\vec{\omega}\times\vec{U}_{\theta x})$ και $\vec{J}^{κ}_{μ} = \frac{P}{g}|\vec{\chi}^{κ}_{μ}| = \frac{P}{g}\,y\,\omega^2$ (1) Εξετάζουμε χι οποιαδήποτε στιγμή

$|\vec{J}_{cor}| = 2|\vec{\omega}\times\vec{U}_{\theta x}| = 2\frac{P}{g}|\vec{\omega}||\vec{U}_{\theta x}|\cdot\sin\alpha$ (2)

και $\underline{r}: \Rightarrow \frac{P}{g}|\vec{\chi}_{\theta x}| = |\vec{J}^{κ}_{μετ}|\cdot\sin\alpha - |\vec{P}|\cos\alpha$ (3)

(3) $\overset{(1)}{\Longrightarrow} \dots \Rightarrow |\vec{\chi}_{\theta x}| = \frac{d|\vec{U}_{\theta x}|}{dt} = \omega^2 y\sin\alpha - g\cos\alpha$ (4)

εφα $= \frac{dy}{dx}$, $\sin\alpha = \frac{dy}{ds}$, $\cos\alpha = \frac{dx}{ds}$ (5) → στοιχειώδες τόξο.

$$\frac{d\vec{U_{Gx}}}{dt} = \frac{dU_{Gx}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} = \frac{dU_{Gx}}{ds}\,U_{Gx} \quad (6)$$

$$(4) \xrightarrow{(5),(6)} \dots \Rightarrow U_{Gx}\cdot dU_{Gx} = \omega^2 y\,dy - g\,dx \quad (7) \xrightarrow{y^2=2px}$$

$$\Rightarrow U_{Gx}^2 = \omega^2 y^2 - 2gx + C = \boxed{2|p\omega^2 - g|x + C \quad (8)}$$

Οικογένεια λύσεων. Ανάλογα με τις αρχικές τιμές βρίσκω τη U_{Gx}.

i] $U_{Gx}^2 = 2|p\omega^2 - g|x + C \Rightarrow 0 = 2|p\omega^2 - g|x_0 + C \Rightarrow U_{Gx}^2 = 2|p\omega^2 - g|x - 2|p\omega^2 - g|x_0$

$$\Rightarrow \boxed{U_{Gx}^2 = 2(p\omega^2 - g)(x - x_0)} \Rightarrow U_{Gx} = \sqrt{2(p\omega^2 - g)(x - x_0)}$$

α] Αν $p\omega^2 > g \longrightarrow x > x_0$ (Προς τα πάνω κίνηση)

β] Αν $p\omega^2 < g \longrightarrow x < x_0$ (Προς τα κάτω κίνηση)

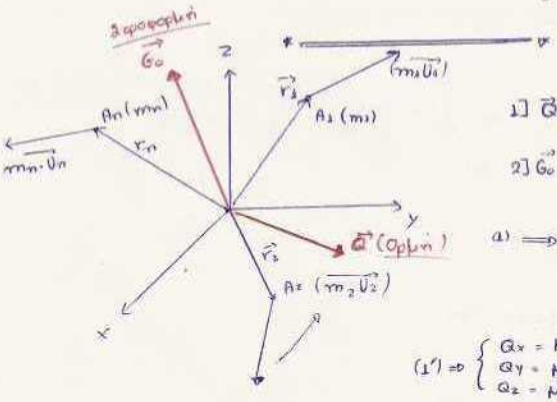
γ] Αν $p\omega^2 = g \rightarrow U_{Gx} = 0$ (ισοδύναμο σημείο.)

ii] $U_{Gx}^2 = 2|p\omega^2 - g|\cdot 0 + C \Rightarrow U_0^2 = C \Rightarrow \boxed{U_{Gx}^2 = 2(p\omega^2 - g)x + U_0^2}$

$$U_{Gx} = \sqrt{2(p\omega^2 - g)x + U_0^2}$$

• Οταν $U_{Gx} = 0 \longrightarrow x = \dfrac{U_0^2}{2(g - p\omega^2)}$

Πρέπει να μη μηδενίζεται ο παρονομαστής $\longrightarrow \boxed{g = p\omega^2}$



1] $\vec{Q} = m_1\vec{U_1} + \dots + m_n\cdot\vec{U_n} = \sum_{j=1}^{n} m_j\cdot\vec{U_j}$ (1)

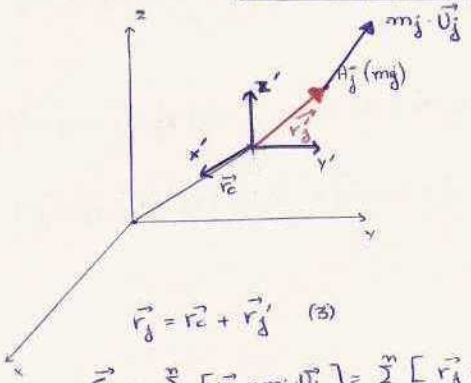
2] $\vec{G_0} = \vec{r_1}\times m_1\vec{U_1} + \dots + \vec{r_n}\times m\vec{U_n} = \sum_{j=1}^{n}\vec{r_j}\times m_j\cdot\vec{U_j}$ (2)

$$(1) \Longrightarrow \vec{Q} = \sum_{j=1}^{n} m_j\vec{U_j} = \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n} m_j\vec{r_j} = M\frac{d\vec{r_c}}{dt} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{Q} = M\vec{U_c}}$$

$$(1') \Rightarrow \begin{cases} Q_x = M\dot{x_c} \\ Q_y = M\dot{y_c} \\ Q_z = M\dot{z_c} \end{cases} \quad (1'').$$

Μηχανική III



$$\vec{r_j} = \vec{r_c} + \vec{r_j}' \quad (3)$$

$$\vec{G_o} = \sum_{j=1}^{n} [\vec{r_j} \times m_j \vec{U_j}] = \sum_{j=1}^{n} \left[\vec{r_j} \times m_j \frac{d\vec{r_j}}{dt} \right] \overset{(3)}{=}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left[(\vec{r_c} + \vec{r_j}') \times m_j \frac{d}{dt} (\vec{r_c} - \vec{r_j}') \right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (\vec{r_c} \times m_j \cdot \vec{U_c}) + \sum_{j=1}^{n} \left[\vec{r_c} \times m_j \frac{d\vec{r_j}'}{dt} \right] + \sum_{j=1}^{n} (\vec{r_j}' \times m_j \cdot \vec{U_c}) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \left[\vec{r_j}' \cdot \times m_j \frac{d\vec{r_j}}{dt} \right] =$$

$$= \vec{r_c} \times M \vec{U_c} + \vec{r_c} \times \underbrace{\cancel{\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{n} m_j \cdot \vec{r_j}'}}_{\text{Ως προς το κεντροβαρικό σύστημα}} \to 0 + \underbrace{\cancel{\sum_{j=1}^{n} m_j \cdot \vec{r_j}' \times \vec{U_c}}}_{\text{Ως προς το κεντροβαρικό σύστημα}} \to 0 + \sum_{j=1}^{n} (\vec{r_j}' \times m_j \cdot \vec{U_j}')$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{G_o} = \vec{r_c} \times M \cdot \vec{U_c} + \sum_{j=1}^{n} (\vec{r_j}' \times m_j \cdot \vec{U_j}')} \quad (4)$$

<u>Σημείωση</u> $\vec{G_o} = \vec{r_c} \times M\vec{U_c} + \sum_{j=1}^{n} (\vec{r_j}' \times m_j \cdot \vec{U_j}') = \vec{r_c} \times M \cdot \vec{U_c} + \sum_{j=1}^{n} (\vec{r_j}' \times m_j \cdot \vec{U_j}')$.

$$* \quad \sum_{j=1}^{n} (\vec{r_j}' \times m_j \cdot \vec{U_j}') = \sum_{j=1}^{n} (\vec{r_j}' \times m_j [\vec{U_c} + \vec{U_j}']) =$$

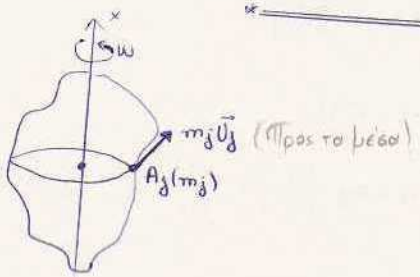
$$= \underbrace{\cancel{\sum_{j=1}^{n} (\vec{r_j}' \times m_j \cdot \vec{U_c})}}_{\text{Ως προς το κεντροβαρικό}} \to 0 + \sum_{j=1}^{n} [\vec{r_j}' \times m_j \cdot \vec{U_j}'] = \sum_{j=1}^{n} (\vec{r_j}' \times m_j \vec{U_j}').$$

$$(4) \Longrightarrow \dots \Rightarrow G_x = \sum_{j=1}^{n} m_j \left(y_j \cdot \dot{z}_j - z_j \cdot \dot{y}_j \right) = M \left[y_c \cdot \dot{z}_c - z_c \cdot \dot{y}_c \right] + \sum_{j=1}^{n} m_j \left(y_j' \cdot \dot{z}_j' - z_j' \cdot \dot{y}_j' \right)$$

$$G_y = \sum_{j=1}^{n} m_j \left(z_j \cdot \dot{x}_j - x_j \cdot \dot{z}_j \right) = M \left[z_c \cdot \dot{x}_c - x_c \cdot \dot{z}_c \right] + \sum_{j=1}^{n} m_j \left(z_j' \cdot \dot{x}_j' - x_j' \cdot \dot{z}_j' \right)$$

$$G_z = \sum_{j=1}^{n} m_j \left(x_j \cdot \dot{y}_j - y_j \cdot \dot{x}_j \right) = M \left[x_c \cdot \dot{y}_c - y_c \cdot \dot{x}_c \right] + \sum_{j=1}^{n} m_j \left(x_j' \cdot \dot{y}_j' - y_j' \cdot \dot{x}_j' \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{G_o} = \vec{r_c} \times M \cdot \vec{U_c} + G_c}$$

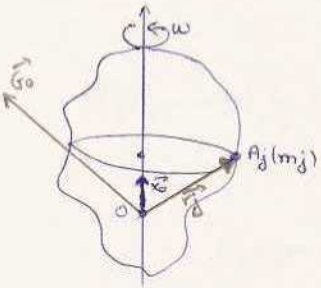


Η στροφορμή του σημείου $A_j(m_j)$ είναι: $m_j U_j \cdot h_j$

$$G_x = \sum_{j=1}^{n} m_j U_j \cdot h_j = \sum_{j=1}^{n} m_j (\omega \cdot h_j) \cdot h_j = \omega \cdot \sum_{j=1}^{n} m_j \cdot h_j^2 = \omega I_x$$

$$\boxed{G_x = \omega I_x}$$

Καταλήγουμε στον ίδιο τύπο και διαφορετικά.



$$G_x = \vec{G_o} \cdot \vec{x_o}$$

$$\vec{G_o} = \sum_{j=1}^{n} \left[\vec{r_j} \times m_j \cdot \vec{U_j} \right] = \sum_{j=1}^{n} \left[\vec{r_j} \times m_j (\vec{\omega} \times \vec{r_j}) \right] = \dots =$$

$$= \vec{\omega} \cdot \sum_{j=1}^{n} m_j \cdot \vec{r_j} \cdot \vec{r_j} - \sum_{j=1}^{n} m_j \cdot \vec{r_j} \left(\vec{\omega_j} \cdot \vec{r_j} \right)$$

$$= \cancel{\sum_{j=1}^{n} m_j \cdot \vec{r_j} \left(\vec{\omega_j} \cdot \vec{r_j} \right) - \omega \cdot \vec{x_o} \sum_{j=1}^{n} m_j \cdot \vec{r_j}^2 - \sum_{j=1}^{n} m_j \cdot \vec{r_j}}$$

$$G_x = \vec{\omega} \cdot \vec{x} \sum_{j=1}^{n} m_j \cdot \vec{r_j} - \sum_{j=1}^{n} m_j \left(\vec{r_j} \cdot \vec{x_o} \right) \left(\vec{\omega} \cdot \vec{r_j} \right) =$$

$$= |\vec{\omega}| \cdot \sum_{j=1}^{n} m_j \cdot \vec{r_j}^2 - |\vec{\omega}| \cdot \cancel{\sum_{j=1}^{n} m_j \cdot x_j^2} = |\vec{\omega}| \cdot \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\vec{r_j} - \vec{x_j}^2 \right)}_{\vec{h_j}^2} = |\vec{\omega}| \sum_{j=1}^{n} m_j \cdot h_j^2 =$$

$$= I_x \cdot |\vec{\omega}|.$$

Μηχανική ΙΙΙ

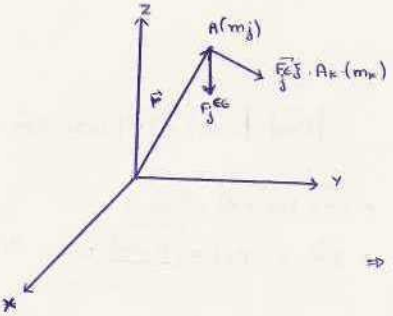
$$A_j \longrightarrow \frac{1}{2} m_j \cdot \vec{U}_j^2$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} m_j \cdot \vec{U}_j^2 = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} m_j \left[\vec{U}_c + \vec{U}_j'' \right]^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} m_j \cdot \vec{U}_c^2 + \sum_{j=1}^{n} m_j \cdot \vec{U}_c \cdot \vec{U}_j'' + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} m_j \cdot \vec{U}_j''^2 =$$

$$= \frac{1}{2} M \cdot \vec{U}_c^2 + \vec{U}_c \cdot \underbrace{\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{n} m_j \cdot \vec{r}_j''}_{=\,0} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} m_j \cdot \vec{U}_j''^2$$

Μηχανική III



$$m_j \cdot \frac{d^2 r_j}{dt^2} = \vec{F}_j^{\,\varepsilon\xi} + \vec{F}_j^{\,\varepsilon\sigma} \Big|_{j=1,\dots,n} \quad (1)$$

$$(+)(1) \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} m_j \frac{d^2 r}{dt^2} = \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_j^{\,\varepsilon\xi} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \vec{F}_j^{\,\varepsilon\sigma}}_{=0} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} m_j \frac{d\vec{r}_j}{dt}}_{Q} = \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_j^{\,\varepsilon\xi} \quad (3)$$

$$(3) \Rightarrow \vec{Q} - \vec{Q}_0 = \sum_{j=1}^{n} \int_{t_0}^{t} \vec{F}_j^{\,\varepsilon\xi}\, dt$$

$$Q_x - Q_0^x = \sum_{j=1}^{n} \int_{t_0}^{t} \vec{F}_{jx}^{\,\varepsilon\xi}\, dt$$

$$Q_y - Q_0^y = \sum_{j=1}^{n} \int_{t_0}^{t} \vec{F}_{jy}^{\,\varepsilon\xi}\, dt$$

$$Q_z - Q_0^z = \sum_{j=1}^{n} \int_{t_0}^{t} \vec{F}_{jz}^{\,\varepsilon\xi}\, dt \quad (5), (5')$$

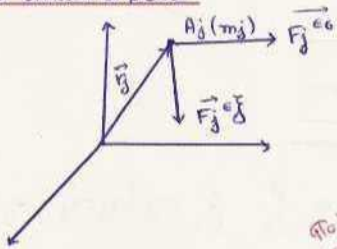
$$\frac{dQ}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_j^{\,\varepsilon\xi} \Rightarrow \{ \dots$$

$$\dot{Q}_x = \sum_{j=1}^{n} F_j^{x\,\varepsilon\xi}$$

$$\dots \quad \dot{Q}_y = \sum_{j=1}^{n} F_j^{y\,\varepsilon\xi} \quad (4)$$

$$\dot{Q}_z = \sum_{j=1}^{n} F_j^{z\,\varepsilon\xi}$$

Δίσκημα υλικών επιφείων

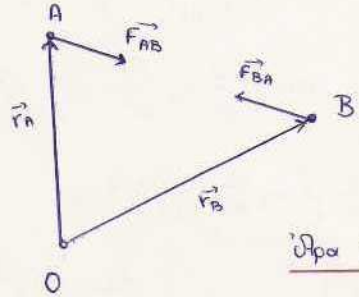


Πολλαπλασιάζουμε εξωτερικά με $\vec{r}_j$.

$$m_j \frac{d^2 \vec{r}_j}{dt^2} = \vec{F}_j^{\,\varepsilon\xi} + \vec{F}_j^{\,\varepsilon\sigma} \Big| \times \vec{r}_j \;\rightarrow\; j = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^{n} (6) \times \vec{r}_j \Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \vec{r}_j \times m_j \frac{d^2 \vec{r}_j}{dt^2} = \sum_{j=1}^{n} \vec{r}_j \times \vec{F}_j^{\,\varepsilon\xi} + \sum_{j=1}^{n} \left(\vec{r}_j \times \vec{F}_j^{\,\varepsilon\sigma} \right) \quad (7)$$

Παίρνω 2 σημεία A, B και σημείο αναφοράς O.



$$|\vec{F_{AB}}| = |\vec{F_{BA}}| = |\vec{F}| \quad (\text{και } \vec{F_{AB}} = -\vec{F_{BA}})$$

• $\vec{r_A} \times \vec{F_{AB}} + \vec{r_B} \times \vec{F_{BA}} =$

$= \vec{F} \times (\vec{r_A} - r_B) = \boxed{\vec{F} \times (\vec{BA})} = 0$ (9)

Αφού $\vec{F} \parallel \vec{BA}$

Άρα δεν υπάρχει ροπή εσωτερικών δυνάμεων

• Παλιβάνω υπόψιν μου τη σχέση:

$$\vec{r_j} \times \frac{d^2\vec{r_j}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r_j} \times \frac{d\vec{r_j}}{dt}\right) \quad (8)$$

$$(7),(8),(9) \Longrightarrow \frac{d}{dt} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \left[\vec{r_j} \times m \frac{d\vec{r_j}}{dt}\right]}_{G_0 \Rightarrow \text{Στροφορμή}} = \sum_{j=1}^{n} \left(\vec{r_j} \times \vec{F_j^{εξ}}\right) \quad (10)$$

Άρα $(10) \Rightarrow \dfrac{d\vec{G_0}}{dt} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left[\vec{r_j} \times \vec{F_j^{εξ}}\right]$ (11)

$$\boxed{\text{Εαν } \forall j : \vec{r_j} \times \vec{F_j^{εξ}} = 0 \Rightarrow \vec{G_0} = \text{σταθερό}}$$

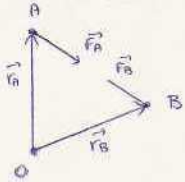
$$(11) : \Rightarrow \quad (12) \begin{cases} x: \dfrac{dG_x}{dt} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (\text{ροπή})_x = \vec{F_j^{εξ}} \Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{n} m_j \left(y_j \cdot \ddot{z}_j - z_j \cdot \ddot{y}_j\right) = \\ \qquad = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left(y_j \cdot F_j^{z\,εξ} - z_j \cdot F_j^{y\,εξ}\right) \\ y: \dfrac{dG_y}{dt} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (\text{ροπή})_y = \vec{F_j^{εξ}} \Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{n} m_j \left(z_j \ddot{x} - x_j \cdot \ddot{z}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \left(z_j \cdot F_j^{x\,εξ} - x_j F^{z\,εξ}\right) \\ z: \dfrac{dG_z}{dt} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} (\text{ροπή})_z = \vec{F_j^{εξ}} \Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{n} m_j \left(x_j \cdot \ddot{y}_j - y_j \cdot \ddot{x}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \left(x_j F_j^{y\,εξ} - y_j \cdot F_j^{x\,εξ}\right) \end{cases}$$

Διαφορικό.

$$d\left(\frac{m_j \cdot U_j^2}{2}\right) = \vec{F}_j^{\,\epsilon\delta} \cdot d\vec{r}_j + \vec{F}_j^{\,\epsilon\epsilon} \cdot d\vec{r}_j \qquad j = 1, \ldots, n \qquad (13)$$

$$+(13) \Longrightarrow d \sum_{j=1}^{n} \left(\tfrac{1}{2} m_j U_j^2\right) = \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_j^{\,\epsilon\delta} \cdot d\vec{r}_j + \sum_{j=1}^{n} F_j^{\,\epsilon\epsilon} \cdot d\vec{r}_j \qquad (14)$$

$$(15) \quad \boxed{dT = \sum_{j=1}^{n} F_j^{\,\epsilon\delta} \cdot d\vec{r}_j + \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_j^{\,\epsilon\epsilon} \cdot d\vec{r}_j} \Rightarrow \boxed{T - T_0 = A_j^{\,\epsilon\delta} + A_j^{\,\epsilon\epsilon}} \quad (16)$$



$$\vec{F}_A = -\vec{F}_B \Rightarrow |\vec{F}_A| = |\vec{F}_B| = f(\rho_{AB}) \qquad \underline{\rho_{AB} = AB}$$

↳ δυνάμεις αποστάσεις

$$\vec{F}_A \cdot d\vec{r}_A + \vec{F}_B \cdot d\vec{r}_B = \vec{F}_B(d\vec{r}_B - d\vec{r}_A) = \vec{F} \cdot d(\vec{r}_B - \vec{r}_A) = \vec{F}_B \cdot d(\vec{AB})$$

$$= \vec{F}_B \cdot d(\rho_{AB} \cdot \vec{\alpha}_0) = \pm \underbrace{f(\rho_{AB}) \cdot \vec{\alpha}_0}_{\text{δύναμη}} \cdot \left(d\rho_{AB} \cdot \vec{\alpha}_0 + \rho_{AB} \cdot d\vec{\alpha}_0\right) =$$

$$= \pm f(\rho_{AB})\, d\rho_{AB} \qquad (17)$$

$$\sum_{j=1}^{n} F_j^{\,\epsilon\epsilon} \cdot d\vec{r}_j \overset{(17)}{\Longrightarrow} \pm \frac{1}{2} \sum_{k,l} \left[f(\rho_{kl})\, d\rho_{kl} \right] = dU_j \qquad (18)$$

Στοιχειώδες δυναμικό των εσωτερικών δυνάμεων

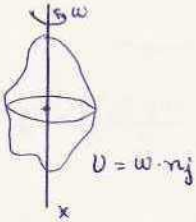
Άρα (15) ⟹ (18) : $\overbrace{dT - dU_j}^{d(T-U_j)} = \sum_{j=1}^{n} F_j^{\,\epsilon\delta} \cdot d\vec{r}_j \Rightarrow$

$$\Downarrow$$

$$d(T + V_j) = \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_j^{\,\epsilon\delta} \cdot d\vec{r}_j \qquad (19)$$

Αν $U_j = \text{σταθ}$: (19) ⟹ $dT = \sum_{j=1}^{n} \vec{F}_j^{\,\epsilon\delta} \cdot d\vec{r}_j$ (20).

• Όταν έχω περιστροφή γύρω από τον x τότε η στροφορμή γύρω από τον άξονα x έχουμε αποδείξει ότι είναι $\boxed{G_x = I_x \cdot \omega}$



• Η κινητική ενέργεια είναι

$$\boxed{T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j \vec{U_j}^2 = \dots = \frac{1}{2} M \cdot \vec{U_c}^2}$$

όταν $\vec{U_j} = \vec{U_c}$

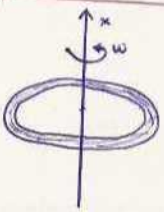
Μεταφορική κίνηση

• Αν έχω περιστροφική κίνηση : $T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j \cdot U_j^2 = \frac{1}{2} m_j \omega^2 \cdot r_j^2 \Rightarrow$

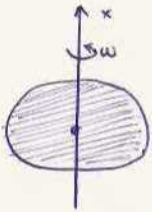
$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{1}{2} I_x \cdot \omega^2}$$

• Αν έχω μεταφορά και περιστροφή

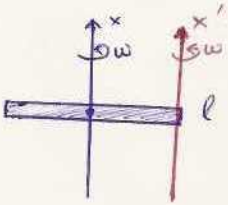
$$\boxed{T = \frac{1}{2} m U_c^2 + \frac{1}{2} I_x \cdot \omega^2.}$$



$I_x = MR^2$



$I_x = \frac{1}{2} MR^2$

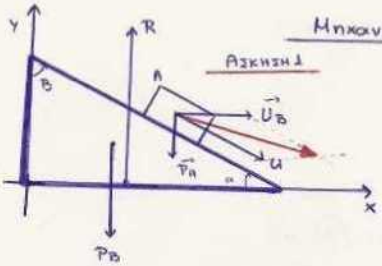


: $I_x = \frac{1}{12} M\ell^2$

: $I_{x'} = \frac{1}{3} M\ell^2.$

Μηχανική III

Άσκηση 1



Σύστημα σωμάτων A,B, (χωρίς τριβές).
- Το A ολισθαίνει ως προς το B με u = σταθ
- Στην αρχή της κίνησεως το σύστημα ηρεμεί.
- Αν $P_A, P_B \Rightarrow$ βάρη, να υπολογιστεί η ταχύτητα της σφήνας.

Θεωρώ το σύστημα αναφοράς στη διεύθυνση κίνησης της σφήνας

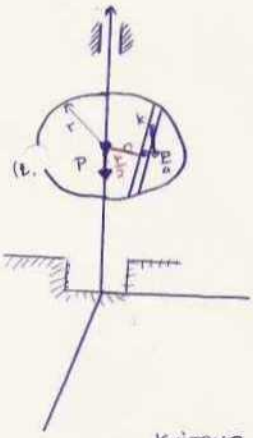
$$x: \quad \underbrace{\vec{Q}_2^x - \vec{Q}_1^x}_{=0} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\boxed{\xi_j^x}}_{0\text{ εξ}} \left(\vec{F}_j \cdot \vec{e}_j\right) = \vec{0} \quad \Bigg\} \Rightarrow \vec{Q}_2^x = \vec{0}$$

$$m_A \cdot U_A^x + m_B \cdot U_B^x = 0$$

$$\vec{U_A} = \vec{U_B} + \vec{u} \Rightarrow U_A^x = U_B^x + u\cos\alpha \longrightarrow \frac{P_A}{g}\left(U_B^x + u\cos\alpha\right) + \frac{P_B}{g} U_B^x = 0$$

$$\Rightarrow U_B^x = -\frac{P_A}{P_B + P_A} \cdot u\cos\alpha$$

Άσκηση 2

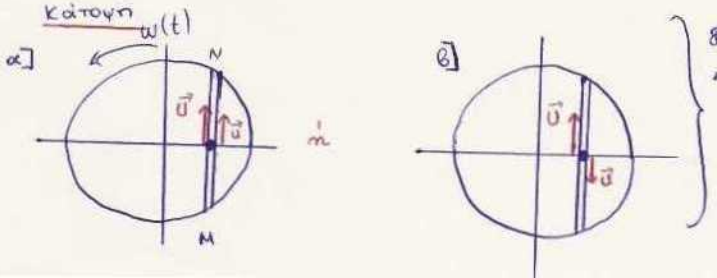


Ο δίσκος (D) ακτίνας r και βάρους P περιστρέφεται γύρω από τον ακίνητο άξονα z. Ένα υλικό σημείο K. βάρους $\frac{P}{4}$ βρίσκεται επί της αυλακώσεως MN και εκτελεί ταλάντωση γύρω από το O, που είναι το μέσον της. Γνωρίζουμε ότι όταν το K διέρχεται από το O, $U_{Ox} = u$ και όταν βρίσκεται στις ακρές M, N, ω_1 είναι η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου.

* Να υπολογιστεί ω_2 όταν $K \equiv O$.

Η αυλάκωση απέχει από τον $z \to \frac{r}{2}$

Κάτοψη



Δεν ξεκαθαρίζεται η φορά της $\vec{u}$

α] Περίπτωση

Αρχή διατήρησης της στροφορμής

$$\frac{dG_z}{dt} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} (\text{ροπη}_z) \vec{F_j^{εξ}}}_{\text{Αυτό είναι } 0\text{, αφού όλες οι } \vec{F_j^{εξ}} \,//\, \vec{z}} \qquad (1)$$

Άρα $\frac{dG_z}{dt} = 0 \Rightarrow G_z = \text{σταθ.}$, Άρα $G_z^{(1)} = G_z^{(2)}$ } (2) 2 χρονικές στιγμές (1),(2).

Από το πρόβλημα έχω 2 στιγμές (κέντρο + ακραίες θέσεις)

(1) $G_z^{(1)} = I_z \cdot \omega_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{g} \cdot r^2 \omega_1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{P}{g} \cdot r(r\omega_1) = \frac{3}{4} \frac{P}{g} r^2 \omega_1$. (Ακραίες θέσεις)

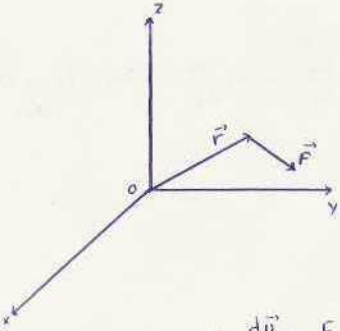
(2) $G_z^{(2)} = I_z \cdot \underbrace{\omega_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{g} \omega_2 \cdot r^2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{P}{g} \cdot \overset{\text{απόλυτη}}{U_K^{(\alpha)}} \cdot \frac{r}{2} =$

Είμαστε σε
άλλη στιγμή
άρα έχουμε
άλλη ω_2 (την οποία ψάχνουμε).

$|\vec{U_K^{\alpha}}| = |\vec{U_{\Psi ετ}}| + |\vec{U_{\theta x}}| \pm \omega_2 \frac{r}{2} + u.$

• Αντικαθιστώ και έχω : $G_z^{(2)} = \frac{9}{16} \frac{P}{g} r^2 \omega_2 + \frac{P}{8g} r u$ (5)

Μηχανική III



$$\vec{r} = x\cdot\vec{i} + y\cdot\vec{j} + z\cdot\vec{k}$$

$$m\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

$$\vec{F}\,(F_x, F_y, F_z)$$

$$\vec{r}\,(q_1, q_2, q_3, t)$$

$$m\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = F \;\Big|\; \cdot\boxed{\frac{\partial r}{\partial q_i}} \qquad (i=1,2,3) \quad (1)$$

→ Πολλαπλασιάζω εσωτερικά με $\boxed{\frac{\partial r}{\partial q_i}}$

γενικεύεται συντεταγμένη
$i \to \theta, xyz \to \rho\,(x, y, z)$
$\vec{u}\,(\cos x, \sin x, \rho)$
κλπ.

Ισχύει $\delta A = Q_i \delta q_i \quad (i=1,2,3)$ (Έργο)

$$(1) \Longrightarrow m\,\underbrace{\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}} = \vec{F}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i} \quad (2) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right) - m\vec{v}\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right) = \vec{F}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i} \quad (3) \Rightarrow \quad i=1,2,3$$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{v} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_1}\cdot\dot{q}_1 + \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_2}\cdot\dot{q}_2 + \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_3}\dot{q}_3 \quad (4)$$

$$\frac{\partial\dot{\vec{r}}}{\partial\dot{q}_1} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_1} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial\dot{q}_1}, \quad \frac{\partial\dot{\vec{r}}}{\partial\dot{q}_2} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_2}, \quad \frac{\partial\dot{\vec{r}}}{\partial\dot{q}_3} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_3} \quad (5)$$

$$\boxed{\frac{\partial\vec{v}}{\partial\dot{q}_i} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i} \quad (i=1,2,3)} \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial q_i\partial q_1}\cdot\dot{q}_1 + \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial q_i\cdot\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial q_i\cdot\partial q_3}\dot{q}_3 + \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial q_i\cdot\partial t}\,[t]' \quad (7)$$

Επίσης $$\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial q_i\cdot\partial t}t' + \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial q_i\cdot\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial q_i\cdot\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial^2\vec{r}}{\partial q_i\partial q_3}\dot{q}_3 \quad (8)$$

$$(7) = (8) \Rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial\vec{v}}{\partial q_i}} \quad (9)$$

$$(3),(6),(9) \Longrightarrow \frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial\dot{q}_i}\right) - m\vec{v}\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial q_i} = \vec{F}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i} \quad (i=1,2,3) \quad (10)$$

$$* \; T=\frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow m\vec{v}\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial\dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i} \; (11) \quad \text{και} \quad m\vec{v}\cdot\frac{\partial\vec{v}}{\partial q_i} = \frac{\partial T}{\partial q_i}$$

$$(10) \overset{(11)}{\Longrightarrow} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \vec{F}\cdot\frac{\partial\vec{r}}{\partial q_i} = F_x\frac{\partial x}{\partial q_i} + F_y\frac{\partial y}{\partial q_i} + F_z\frac{\partial z}{\partial q_i} = Q_i \quad (i=1,2,3) \quad (12)$$

Άρα $$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i} \quad (i=1,2,3) \quad (13)$$

$$\vec{F} = \text{grad} = \underbrace{\frac{\partial U}{\partial x}}_{F_x}\vec{i} + \underbrace{\frac{\partial U}{\partial y}}_{F_y}\vec{j} + \underbrace{\frac{\partial U}{\partial z}}_{F_z}\vec{k} \quad (14)$$

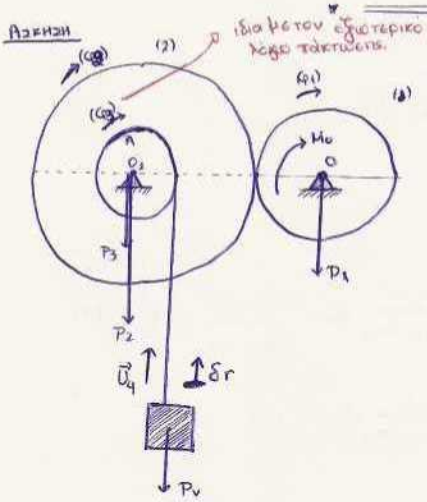
Άρα $$(13) \overset{(14),(12)}{\Longrightarrow} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} \quad (i=1,2,3) \quad (15)$$

$$\underbrace{T+U}_{\text{δυναμικό}} = T - V = \mathcal{L} \quad (16)$$

$V \rightarrow$ δυναμική ενέργεια

$$(15) \overset{(16)}{\Longrightarrow} \frac{d}{dt}\frac{\partial(T+U)}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial(T_i+U)}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial\dot{q}_i} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} = 0, \; (i=1,2,3) \quad (17)$$

Άσκηση



Ο οδοντωτός τροχός (1) βάρους P_1 και ακτίνας R_1, περιστρέφεται στο επίπεδό του χωρίς τριβή, λόγω ροπής

Ο (2) βάρους P_2 και ακτίνας R_2 που βρίσκεται σε επαφή με τον (1). Συνδέεται με το τύμπανο Α (P_3, R_3). Πάνω στο τύμπανο είναι περιτυλιγμένο νήμα, στο άκρο του οποίου υπάρχει P_4 το οποίο ανέρχεται με την εφαρμογή της ροπής M_o. Να καθοριστεί η επιτάχυνση του φορτίου αν οι τροχοί και το τύμπανο είναι κυκλικοί κύλινδροι (m νήματος = αμελητέα)

Μηχανική III

• Ο βαθμός ελευθερίας είναι (1), χιατί δεν υπάρχουν τμήματα που να συνδέονται (π.χ.) με ελατήρια μεταξύτους.

• Θέτω $q = \varphi_1$ (1 βαθμός ελευθερίας).

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = Q_{\varphi_1}$$

Ισχύει $\underbrace{\delta\varphi_2 \cdot r_2}_{\delta r} = \underbrace{\delta\varphi_1 \cdot r_1}_{\delta r} \Rightarrow \boxed{\delta\varphi_2 = \frac{r_1}{r_2}\delta\varphi_1}$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\varphi_3 = \varphi_2 = \frac{r_1}{r_2}\varphi_1}$$

Επειδή έχουμε μόνο μια συντεταγμένη : $q_1 \longrightarrow \delta A = Q_{\varphi_1} \cdot \delta\varphi_1$

• Άρα $\delta A = \underbrace{(M_0 \cdot \delta\varphi_1)}_{\text{Έργο ροπής}}$

• Η P_1 δεν δημιουργεί έργο αφού το O_1, O_2 είναι ακίνητα. Αν είχαμε ελατήρια στις θέσεις O_1, O_2 τότε θα δημιουργούσαν έργο.

• Η P_4 δημιουργεί έργο : $\delta' A = -P_4 \cdot \delta r$.

Άρα $\delta A = M_0 \cdot \delta\varphi_1 - P_4 \cdot \delta r = M_0 \cdot \delta\varphi_1 - \underbrace{\frac{r_1}{r_2} r_3 \delta\varphi_1}_{\delta r} \cdot P_4$

$$\Rightarrow \delta A = \underbrace{\left[M_0 - \frac{r_1 \cdot r_3}{r_2} P_4\right]}_{\text{Ο συντελεστής του } \delta\varphi_1 \text{ είναι η γενικευμένη δύναμη : } Q_{\varphi_1}} \delta\varphi_1$$

Προσδιορίζω $T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 =$

$$= \frac{1}{2} I_1 \cdot \underbrace{\dot{\varphi}_1}_{\text{γωνιακή ταχύτητα περιστροφής μεταβολής της συντεταγμένης } q=\varphi_1.}^2 + \frac{1}{2} I_2 \cdot \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} I_3 \dot{\varphi}_3^2 + \frac{1}{2} \frac{P_4}{g} U_4^2.$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{P_1 r_1^2}{g} \cdot \dot{\varphi}_1^2 + \frac{P_2 \cdot r_2^2}{4g} \cdot \dot{\varphi}_2^2 + \frac{P_3 \cdot r_3^2}{4g} \cdot \dot{\varphi}_3^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{P_4}{g} \cdot U_4^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{P_1 \cdot r_1^2 \cdot \dot{\varphi}_1^2}{4g} + \frac{P_2 \cdot r_2^2 \cdot \dot{\varphi}_2^2}{4g} + \frac{P_3 \cdot r_3^2 \cdot \dot{\varphi}_3^2}{4g} + \frac{1}{2} \cdot \frac{P_4 \cdot r_3^2}{g} \cdot \left(\frac{r_1}{r_2} \dot{\varphi}_1\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{4g} \left[(P_1 + P_2) r_1^2 + (P_3 + 2P_4) r_3^2 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \right] \dot{\varphi}_1^2$$

Επίσης $\frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = 0$

Άρα $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = Q_{\varphi_1}$

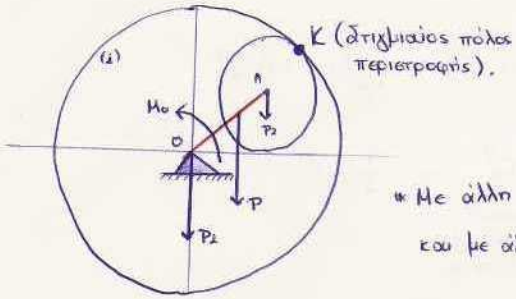
$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{2g} \left[(P_1 + P_2) r_1^2 + (P_3 + 2P_4) r_3^2 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \right] \ddot{\varphi}_1 = M_0 - \frac{r_1}{r_2} r_3 P_4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi}_1 = 2g \frac{M_0 - P_4 \frac{r_1}{r_2} r_3}{(P_1 + P_2) r_1^2 + (P_3 + 2P_4) r_3^2 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2}$$

Άρα βρίσκω $\ddot{\varphi}_2$ και $\ddot{\varphi}_3 \rightarrow \ddot{\varphi}_2 = \ddot{\varphi}_3 = \frac{r_1}{r_3} \ddot{\varphi}_1$

Άρα $r_3 \cdot \ddot{\varphi}_3 = \vec{\gamma}_4$



Να βρεθεί η χ.επ. του OA (ράβδος) εάν η εξωτερική ροπή

* Με άλλη γωνιακή ταχύτητα ω1 κινείται το OA και με άλλη ο κύλινδρος A ως προς το A (ω2).

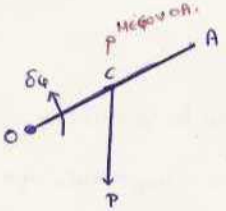
0 βαθμός ελευθερίας: Με μία dφ ⟶ παραλλάσσω το OA και άρα έχω 1 βαθμό ελευθερίας.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi \quad (1)$$

• Προσδιορίζω το Q_φ: Επειδή έχω 1 βαθμό ⟶ $\delta A = Q_\varphi \cdot \delta\varphi$

• P_1 δεν δημιουργεί έργο
• P_2, OA, εξ.ροπή, δημιουργούν έργο

$$\delta A = \underbrace{M_o \cdot \delta\varphi}_{\text{Έργο λόγω ροπής.}}$$



$OC = r_1 - r_2$

$$\delta A_1 = -P\,\frac{(r_1 - r_2)}{2}\cdot\cos\varphi\cdot\delta\varphi$$

$$\delta A_2 = \vec{P_2}\cdot\delta\vec{r_A} = -P_2(r_1 - r_2)\cos\varphi\,\delta\varphi$$

Άρα $$\delta A = \underbrace{\left[M_o - P\left(\frac{r_1 - r_2}{2}\right)\cos\varphi - P_2(r_1 - r_2)\cos\varphi\right]}_{\text{Γενικευμένη δύναμη } Q_\varphi.}\delta\varphi$$

• $T = T_{OA} + T_2 + \cancel{T_3}^{\,0}$

$$T_{OA} = \frac{1}{2} I^{o}_{OA} \cdot \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{P}{3g}(r_1 - r_2)^2 \cdot \dot{\varphi}^2 = \frac{P}{6g}(r_1 - r_2)^2 \dot{\varphi}^2$$

$$T_2 = \underbrace{\frac{1}{2}\frac{P_2}{g} \cdot U_A^2}_{\text{Μεταφορική κίνηση}} + \underbrace{\frac{1}{2} I_A \cdot \omega_2^2}_{\text{Περιστροφική γύρω από το Α.}} = \frac{1}{2}\frac{P_2}{g}.$$

• $\underbrace{|\vec{U_A}| = (OA)\dot{\varphi} \quad \text{και} \quad \vec{U_A} = (AK)\cdot\omega_2.}$

$$(OA)\dot{\varphi} = (AK)\omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{r_1 - r_2}{r_2}\dot{\varphi}$$

$$T_\Theta = T_{OA} + T_2 = \dots = \frac{2P - 9P_2}{12g}(r_1 - r_2)^2 \dot{\varphi}^2 \quad (3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{2P + 9P_2}{6g}(r_1 - r_2)^2, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \frac{2P + 9P_2}{6g}(r_1 - r_2)^2 \ddot{\varphi} \quad (4)$$

<u>Άρα</u> $\ddot{\varphi} = 3g\,\dfrac{2M_O - (P + 2P_2)(r_1 - r_2)\cos\varphi}{2P + 9P_2}.$

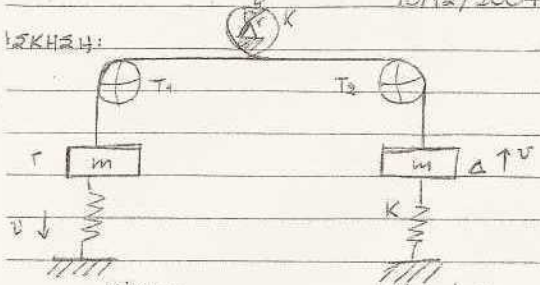
* Αν φάχνω τη M_O όταν ο κύλινδρος περιστρέφεται με σταθ. ω_2 τότε κάνω τα ίδια και βλέποντας ότι αν $\omega_2 =$ σταθ. τότε $\omega_{OA} =$ σταθ. άρα

$$\ddot{\varphi} = 0 \longrightarrow \left(2M_O - (P + 2P_2)(r_1 - r_2)\cos\varphi\right) 3g = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow M_O = \dots$$

Μηχανική ΙΙ

13/12/2004

ΑΣΚΗΣΗ:



Δίνονται

$m_K = 6Kgr$

$m = 2Kgr$

$T = 2sec$

Ζητούνται

r, m, K

Η κατακόρυφη κορδόνι όλων αν οι μάζες κατέβουν από τις βάσεις. Να υπολογίσετε το K των ελατηρίων, ώστε η περίοδος ταλάντωσης να είναι $T = 2sec$

ΛΥΣΗ:

$$T = \frac{1}{2} m_K r^2$$

$$L = T - V$$

$$T = T_K + T_m \qquad T_K = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m_K r^2\right)\dot{\varphi}^2$$

$$T_m = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} m_K r^2\right)\dot{\varphi}^2 + m U^2 \Rightarrow$$

$$\Big\} \; T = \frac{1}{4}(m_K + m) r^2 \dot{\varphi}^2$$

$$V = V_{\varepsilon\lambda} + V_{\mu\alpha\zeta} = 2\left(\frac{1}{2}Kx^2\right) + (\cancel{mgx} - \cancel{mgx}) = Kx^2 = Kr^2\varphi^2$$

$$L = T - V = \left(\frac{1}{4} m_K + m\right) r^2 \dot{\varphi}^2 - K r^2 \varphi^2$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \; *$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}^2} = 2\left(\frac{1}{4} m_K + m\right) r^2 \dot{\varphi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -2Kr^2\varphi$$

$$\overset{*}{\Rightarrow} \left(\frac{1}{4} m_K + m\right)\ddot{\varphi} + K\varphi = 0 \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{K}{\frac{1}{4} m_K + m}\varphi = 0$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{4K}{m_K + 4m}\varphi = 0$$ ΕΞΙΣΩΣΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΗΣ

$$\omega = \sqrt{\frac{4K}{m_K + 4m}}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow \sqrt{\frac{4K}{m_K + 4m}} = 2\pi/T$$

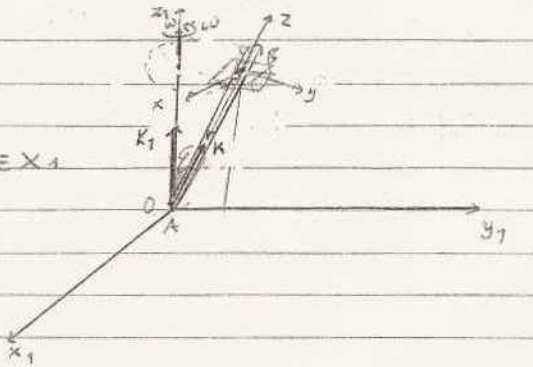
για $T = 2sec \Rightarrow K = 7\pi^2/2 \; N/m$

13/12/2004
(2/3)

Μηχανική III

!ΣΟΣ!

ΣΚΗΣΗ:



Ράβδος AB μπορεί να περιστρέφεται γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα με σταθερό κατά τον περιστροφή η ράβδος σχηματίζει γωνία φ με τον κατακόρυφο άξονα. Πάνω στη ράβδο ολισθαίνει χωρίς τριβή υλικό σημείο μάζας m. Με τη βοήθεια των εξ Lagrange να προσδιοριστεί η κίνηση του υλικού σημείου πάνω στη ράβδο, σύναρτήσει 2 ανεξάρτητων συντεταγμένων που αντιστοιχούν στις αρχικές συνθήκες.

ΛΥΣΗ:

Κ1, Κ μοναδιαία των z1, z αντίστοιχα

Έχουμε 1 βαθμό ελευθερίας

$L = T - V$

Επομένως αρκεί να υπολογίσουμε την κινητική ενέργεια T και τη δυναμική ενέργεια V του σημείου Γ

$T = \frac{1}{2} m V_a^2$ Δυστυχώς πρέπει να υπολογίσουμε την απόλυτη ταχύτητα του σημείου Γ

$\underset{\sim}{V_{\alpha\lambda}} = \underset{\sim}{V_{\sigma\chi}} + \underset{\sim}{V_{\mu}}$

$V_{\sigma\chi} = \dot{r} B$

$\underset{\sim}{V_{\mu}} = \underset{\sim}{\omega} \times \underset{\sim}{r} = \omega r (K_1 \times K) = -r\omega r \eta\mu\varphi$

Μηχανική III

$r = \tau$

$V_a = \sqrt{\dot{r}^2 + \omega^2 r^2 \eta\mu^2\varphi}$

$\underset{\sim}{V_a} = \dot{r}\underset{\sim}{k} - \underset{\sim}{r}\omega r \eta\mu\varphi$

$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{cases} |a||b|\eta\mu(\vec{a},\vec{b})\, e_0 \\ 0 \text{ αν } \vec{a}=0 \text{ ή } \vec{b}=0 \end{cases}$

$V_a^2 = \dot{r}^2 + \omega^2 r^2 \eta\mu^2\varphi$

Συνεπώς: $T = \frac{1}{2} m V_a^2 = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + \omega^2 r^2 \eta\mu^2\varphi)$

$V = mgh = mgr\sigma\upsilon\nu\varphi$

e_0: μοναδιαίο κάθετο στο επίπεδο των A, B

$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + \omega^2 r^2 \eta\mu^2\varphi)$

$V = mgr\sigma\upsilon\nu\varphi$

$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + \omega^2 r^2 \eta\mu^2\varphi) - mgr\sigma\upsilon\nu\varphi$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$

$\frac{\partial L}{\partial r} = mr\omega^2 \eta\mu^2\varphi - mg\sigma\upsilon\nu\varphi$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0 \Rightarrow$

$m\ddot{r} - mr\omega^2 \eta\mu^2\varphi + mg\sigma\upsilon\nu\varphi = 0 \Rightarrow$

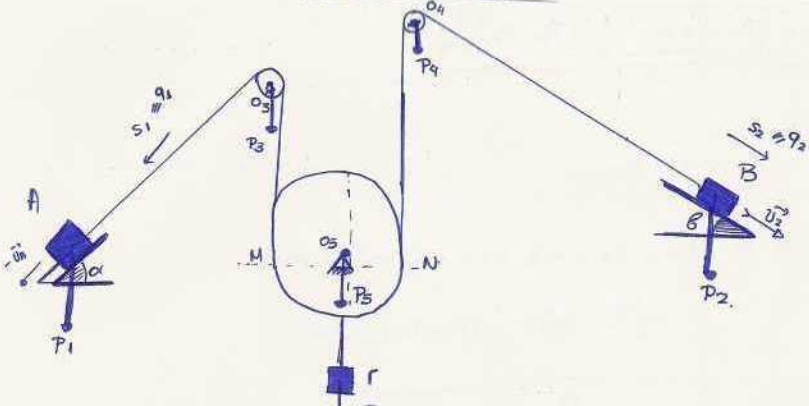
$\ddot{r} - r\omega^2 \eta\mu^2\varphi = -g\sigma\upsilon\nu\varphi$

$r = r_u + r_0$ $\qquad r_u = \frac{g\sigma\upsilon\nu\varphi}{\omega^2 \eta\mu^2\varphi}$

r_0: λύση της αντίστοιχης ομογενούς

$\eta^2 - \omega^2 \eta\mu^2\varphi = 0 \Rightarrow \eta = \pm\omega\eta\mu\varphi$

$r_0 = Ae^{\omega\eta\mu\varphi t} + Be^{-\omega\eta\mu\varphi t}$



Δίνεται ενα σύστημα τροχαλιών O_3, O_5, O_4, βάσει των οποίων κινείται το σύστημα Α, Β, Γ. Να υπολογιστούν οι επιταχύνσεις των 3κωμάτων όταν χωρίζουμε τα βάρη τους αντίστοιχά P_1, P_2, P_6. Επίσης χωρίζουμε τις διαστάσεις και τα βάρη των τροχαλιών r_3, r_4, r_5 και P_3, P_4, P_5. Δίνονται α, β

• Βαθμός ελευθερίας = 2 ⟶ Χρειάζομαι 2 εξισώσεις Langrange.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial s_1} = Q_{s_1} \quad (1)$$

Γενικευμένη δύναμη. Τη βρίσκω αν θεωρήσω $\Delta s_1 \neq 0$ (δίνω δυνατή μετατόπιση στο 1 και παγώνω το 2.

$\delta s_2 = 0 \Rightarrow Q_{s_1} = \ldots$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial s_2} = Q_{s_2} \quad (2)$$

P_1: $\vec{P_1} \cdot \delta\vec{s_1} = P_1 \cdot \sin\alpha \cdot \delta s_1 = \delta A_1$

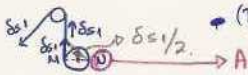
P_3: Δεν δίνει έργο. Αν είχα ελατήριο θα είχα q_3 (χευ. συντεταγμένη και θα είχα και χευ. δύναμη).

P_4: Ομοια

P_2: Δεν δίνει έργο γιατί θεωρώ $\delta s_2 = 0$

P_5: Με το τράβηγμα η O_5 ανεβαίνει. Το P_5 είναι αντίρροπο άρα $\delta A_5 < 0 \Rightarrow -(P_5+P_6)\,\delta s_{O_5}$

P_6:



$(P_5+P_6)\frac{\delta s_1}{2}$

→ Ακίνητο (στιγμιαίος πόλος περιστροφής)

Άρα $\boxed{\delta A_1 = \underbrace{\left[P_1 \cdot \sin a - \frac{1}{2}(P_5+P_6)\right]}_{=Q_{s1}} \cdot \delta s_1}$

Όμοια για το αριστερό τμήμα:

$$\delta s_2 \neq 0,\ \delta s_1 = 0 \Rightarrow \delta A_2 = P_2 \cdot \sin b \cdot \delta s_2 - (P_5+P_6)\,\delta r_{o5} =$$

$$= \underbrace{\left[P_2 \cdot \sin b - \frac{1}{2}(P_5+P_6)\right]}_{Q_{s2}} \delta s_2$$

Άρα $T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 \Rightarrow$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2}\frac{P_1}{g}\cdot \dot{s}_1^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{P_2}{g}\cdot \dot{s}_2^2 + \frac{1}{2}\underbrace{I_{O_3}}_{\frac{P_3}{2g} r_3^2}\cdot \underbrace{\dot{\varphi}_3^2}_{\left(\frac{\dot{s}_1}{r_3}\right)^2} + \frac{1}{2}\frac{P_4 \cdot r_4^2}{2g}\cdot\left(\frac{\dot{s}_2}{r_4}\right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{P_5}{g}\underbrace{\vec{U}_{O5}^{\,2}}_{\left(\frac{\dot{s}_1+\dot{s}_2}{2}\right)^2} + \frac{1}{2} I_{O5}\cdot \underbrace{\dot{\varphi}_5^2}_{} + T_6 \Rightarrow$$

σχετική του Μ. ως προς Ν.

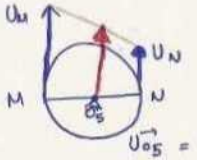
$$\vec{U}_M\Big|_x = \vec{U}_N\Big|_x + \vec{U}_{MN}\Big|_x \Rightarrow$$

Ω σ προς του x

$$\Rightarrow \vec{U}_{MN} = (MN)\dot{\varphi}_5 = \dot{s}_1 - \dot{s}_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\varphi}_5 = \frac{\dot{s}_1 - \dot{s}_2}{2 r_5}}$$

$\Rightarrow T =$



$$\vec{U}_{O5} = \frac{\dot{s}_1 + \dot{s}_2}{2}$$

Άρα

$$T = \frac{1}{2}\cdot\frac{P_1}{g}\dot{s}_1^2 + \frac{1}{2}\frac{P_2}{g}\cdot\dot{s}_2^2 + \frac{1}{2}\frac{P_3}{g} r_3^2\cdot\frac{\dot{s}_1^2}{r_3^2} + \frac{1}{2}\frac{P_4 \cdot r_4^2}{2g}\cdot\frac{\dot{s}_2^2}{r_4^2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\cdot\frac{P_5}{g}\cdot\frac{(\dot{s}_1+\dot{s}_2)^2}{4} + \frac{1}{2}\frac{P_5}{g}\cdot r_5^2\frac{(\dot{s}_1-\dot{s}_2)^2}{4 r_5^2} + \frac{1}{2}\frac{P_6}{g}\cdot U_{O5}^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T = \frac{8P_1 + 4P_3 + 3P_5 + 2P_6}{16g}\cdot\dot{s}_1^2 + \frac{8P_2 + 4P_4 + 3P_5 + 2P_6}{16g}\dot{s}_2^2 + \frac{(P_5+2P_6)\dot{s}_1\cdot\dot{s}_2}{8g}$$

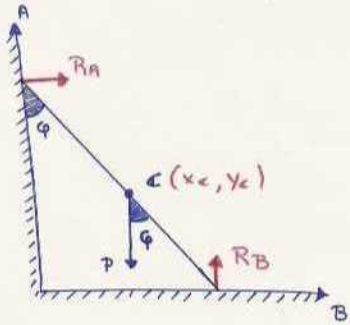
Ισχύει $\frac{\partial T}{\partial s_1} = \frac{\partial T}{\partial s_2} = 0$, αφού η T είναι συνάρτηση των $\dot{s}_1$ και $\dot{s}_2$ και όχι των s_1, s_2.

Άρα
$$\frac{8P_1 + 4P_3 + 3P_5 + 2P_6}{8g}\ddot{s}_1 + \frac{P_5 + 2P_6}{8g}\cdot\ddot{s}_2 = P_1 \sin\alpha - \frac{1}{2}(P_5 + P_6).$$
και
$$\frac{8P_2 + 4P_4 + 3P_5 + 2P_6}{8g}\ddot{s}_2 + \frac{P_5 + 2P_6}{8g}\ddot{s}_1 = P_2 \cdot \sin\beta - \frac{1}{2}(P_5 + P_6)$$

Προσδιορίζω τα $\ddot{s}_1$ και $\ddot{s}_2$ που είναι τα $\vec{\gamma}_A$ και $\vec{\gamma}_B$. Επίσης $\vec{\gamma}_S = \frac{\ddot{s}_1 + \ddot{s}_2}{2}$

Άλλη άσκηση : Προσθήκη φορτίων ή τροχαλιών

Ασκηση 2



Η σκάλα ακουμπά στους τοίχους. Το C είναι το κέντρο μάζας.

Λόγω του βάρους P αρχίζει να πέφτει. Αρχικά είχαμε ηρεμία και φορέσε την κατακόρυφη επιφάνεια. Για ποιά γωνία φ η σκάλα θ'αρχίζει να πέφτει. Να βρεθούν οι αντιδράσεις στηρίξεως της σκάλας στα A, B. Τριβή στα σημεία A, B δεν υπάρχει $(AB) = 2l$.

Λύση

$$\frac{P}{g}\ddot{x}_c = R_A \quad (1) \quad \text{και} \quad \frac{P}{g}\ddot{y}_c = -P + R_B \quad (2)$$

$$\frac{1}{3}\frac{P}{g}l^2\ddot{\varphi} = R_B \cdot l\sin\varphi - R_A \cdot l\cos\varphi \quad (3)$$

$$(3) \xRightarrow{(1),(2)} \frac{l}{3}\ddot{\varphi} = (\ddot{y}_c + g)\sin\varphi - \ddot{x}\cos\varphi \quad (4)$$

$$\left.\begin{aligned} x_c &= \ell \sin\varphi \\ y_c &= \ell\cos\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \dot{x}_c &= [\ell\cos\varphi]\cdot\dot{\varphi} \\ \dot{y}_c &= [-\ell\sin\varphi]\dot{\varphi} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \ddot{x}_c &= [-\ell\sin\varphi]\dot{\varphi}^2 + \ddot{\varphi}\,\ell\cos\varphi \\ \ddot{y}_c &= [-\ell\cos\varphi]\dot{\varphi}^2 + \ddot{\varphi}[-\ell\sin\varphi] \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \ddot{x}_c &= \ell\left[\ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi\right] \\ \ddot{y}_c &= -\ell\left[\ddot{\varphi}\cdot\sin\varphi + \dot{\varphi}^2\cos\varphi\right] \end{aligned}\right\}$$

$$\Longrightarrow \ddot{x}_c = \ell\ddot{\varphi}\cos\varphi - \ell\dot{\varphi}^2\sin\varphi \quad (5)$$

$$\ddot{y}_c = -\ell\ddot{\varphi}\sin\varphi - \ell\dot{\varphi}^2\cos\varphi \quad (6)$$

$$(4) \xrightarrow{(5),(6)} \dots \Rightarrow \ddot{\varphi} = \frac{3}{4}\frac{g}{\ell}\sin\varphi \quad (7)$$

<u>Επίσης</u> : $\ddot{\varphi}\cdot d\varphi = \frac{d\dot{\varphi}}{dt}\,d\varphi = \dot{\varphi}\cdot d\dot{\varphi}$ (*)

$$(7) \xrightarrow{(*)} \dot{\varphi}\cdot d\dot{\varphi} = \frac{3}{4}\frac{g}{\ell}\sin\varphi\cdot d\varphi \; (7') \Rightarrow \int \dots\dots \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \dot{\varphi}^2 = -\frac{3}{2}\frac{g}{\ell}\cos\varphi + C \\ &\text{για } t=0,\ \varphi=\varphi_0,\ \Rightarrow \dot{\varphi}=0 \Rightarrow C = -\frac{3}{2}\frac{g}{\ell}\cos\varphi_0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi}^2 = \frac{3}{2}\cdot\frac{g}{\ell}\cdot(\cos\varphi_0 - \cos\varphi) \quad (8)$$

Επειδή αυτό που θέλουμε συμβαίνει όταν $R_A = 0 \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$$\ddot{x}_c = 0 \overset{(5)}{\Rightarrow} \ddot{\varphi}\cos\varphi - \dot{\varphi}^2\sin\varphi = 0 \quad (9)$$

$$(9) \xrightarrow{(7),(8)} \dots \Rightarrow \left[\cos\varphi - 2(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)\right]\sin\varphi = 0$$

Επειδή $\varphi > \varphi_0$ και $\sin\varphi \neq 0$ $\Big\} \Rightarrow \cos\varphi - 2(\cos\varphi_0 - \cos\varphi) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\varphi = \operatorname{Arc}\cos\left(\frac{2}{3}\cos\varphi_0\right).} \quad (10)$$

$$(5),(6) \longrightarrow (7),(8) \Rightarrow \dots \Rightarrow \ddot{x}_c = \frac{3}{4} g \left(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0\right) \quad (11)$$

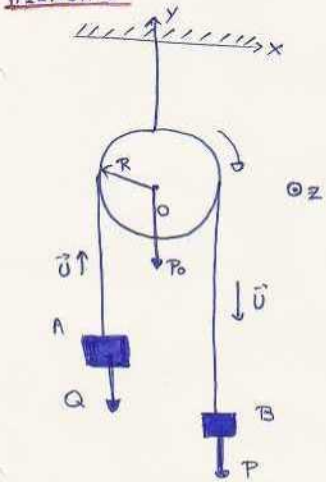
$$\ddot{y}_c = -\frac{9}{4} g \sin^2\varphi + \frac{3}{2} g \left(1 - \cos\varphi_0 \cdot \cos\varphi\right) \quad (12)$$

$$(1) \xrightarrow{(11)} \dots \Rightarrow R_A = \frac{3}{4} P \left(3\cos\varphi - 2\cos\varphi_0\right) \sin\varphi .$$

$$(2) \xrightarrow{(12)} \dots \Rightarrow R_B = \frac{1}{4} P \left(10 - 9\sin^2\varphi - 6\cos\varphi_0 \cdot \cos\varphi\right).$$

* ——— *

ΑΣΚΗΣΗ 3



Αγνοώντας το βάρος του νήματος και την τριβή στην τροχαλία να βρεθούν οι επιταχύνσεις των σωμάτων A, B. Το βάρος της τροχαλίας είναι P_0 και τα βάρη των 2 σωμάτων Q, P.

$$\bullet \quad \frac{dG_z}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \text{ροπη}_z\left(\vec{F}_j^{\,\epsilon j}\right) \quad (1)$$

$$\bullet \quad I_z^0 \cdot \omega + \frac{Q}{g} U \cdot R + \frac{P}{g} U \cdot R = G_z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G_z = \frac{1}{2} \frac{P_0}{g} R^2 \cdot \frac{U}{R} + \frac{QUR}{g} + \frac{PUR}{g} = G_z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\left[\frac{P_0}{2} + P + Q\right] \frac{R}{g} \cdot U = G_z} \quad (2)$$

Στροφορμή

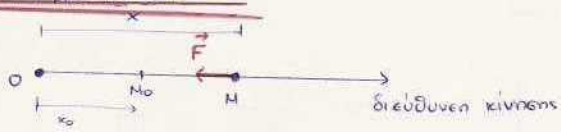
Ροπές : $\boxed{\sum_{j=1}^{n} \text{ροπή}_z\left(\vec{F}_j^{\,\epsilon j}\right) = PR - QR}$ Ροπή (3)

$$(1) \xrightarrow{(2),(3)} \left(P_0 + 2P + 2Q\right) \frac{R}{2g} \cdot \frac{dU}{dt} = (P - Q) R \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dU}{dt} = \frac{\cancel{(P_0 + 2P + 2Q)}}{\cancel{(P - Q) 2g}} \dots$$

Ταλαντώσεις

1] Απλή Αρμονική Ταλάντωση



$\vec{F} = -c\cdot\vec{r}$ (1)

Αν $\vec{r} = x \Rightarrow F_x = -cx$. Αλλα $\vec{F} = m\vec{a}$ (2)

$\Downarrow$

$m\ddot{x} = -cx \Rightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + k^2 x = 0}$ (3)

• Θέτω $x(t) = e^{\lambda t}$ (4) για τη λύση.

(3) $\overset{(4)}{\Longrightarrow}$ $e^{\lambda t}(\lambda^2 + k^2) = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda = \pm ik}$ (5)

(4) $\overset{(5)}{\Longrightarrow}$ $x(t) = c_1 \cdot e^{ikt} + c_2 e^{-ikt}$

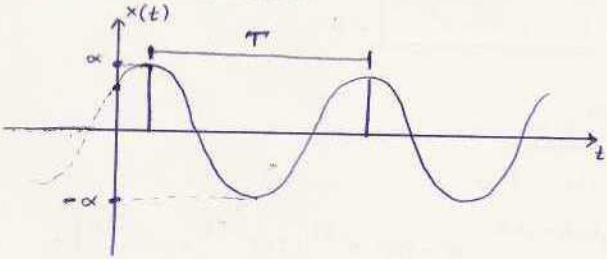
Αλλά $e^{\pm ikt} = \cos kt \pm i\sin kt$

Άρα $x(t) = c_1[\cos kt + i\sin kt] + c_2[\cos kt - i\sin kt] \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = [c_1 + c_2]\cos kt + i[c_1 - c_2]\sin kt \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = A\cos kt + iB\sin kt \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{x(t) = \alpha\cdot\sin(kt + \varphi)}$ 6



$T = \frac{2\pi}{k}$

Επίσης $\dot{x}(t) = \alpha k \cos(kt+\varphi)$ (7)

για $t=0$ $\left\{ \begin{array}{l} x = x_0 \\ \dot{x} = \dot{x}_0 = v_0 \end{array} \right\}$ (8)

$$(6) \xrightarrow{(7),(8)} \alpha = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{k^2}} \quad , \quad \varepsilon\varphi\varphi = \frac{x_0 k}{v_0} \quad (9)$$

σχέση μάζας και ελαστικής σταθεράς

Αν $F(x)$ ή $F(\dot{x})$ δεν υπάρχει ενδιαφέρον αφού

i] αν $F(x) \Longrightarrow$ προσθέτει μία c_3 στη σχέση $m\ddot{x} = -cx$ στο δεξί μέλος.

και

ii] αν $F(\dot{x}) \Longrightarrow$ —"— —"— c_4 —"— —"— $m\ddot{x} = -cx$ στο αριστερό —"—.

Άρα εξετάζουμε την περίπτωση $F(\dot{x})$ όπου F συνάρτηση της $\dot{x}$.

Έστω $F \propto \dot{x}$:

Απόσβεση

Ο Νόμος του Νεύτωνα είναι: $m\ddot{x} = -cx - \mu\dot{x}$ (10) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \ddot{x} = -\frac{c}{m}x - \frac{\mu}{m}\dot{x} \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + 2b\dot{x} + k^2 x = 0} \quad (11)$$

όπου : $2b = \frac{\mu}{m}$ και $k^2 = \frac{c}{m}$.

$x(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}$

Θέτω $x(t) = e^{\lambda t}$

και άρα (11) $\Longrightarrow e^{\lambda t}\left[\lambda^2 + 2b\lambda + k^2\right] = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - k^2}} \quad . \quad (12)$$

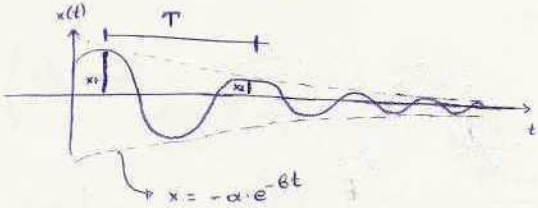
2 περιπτώσεις

A] $b < k \Longrightarrow \sqrt{k^2 - b^2} = k_1$

Άρα $\lambda_{1,2} = -b \pm i k_1$ (13)

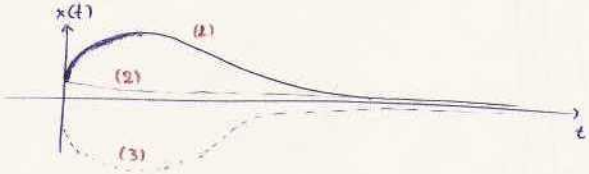
$x(t) = c_1 e^{(-b+ik_1)t} + c_2 e^{(-b-ik_1)t} \Rightarrow x(t) = e^{-bt}\left[c_1 e^{ik_1 t} + c_2 e^{-ik_1 t}\right] \Rightarrow \dots \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = e^{-bt}\left[A\cos k_1 t + B\sin k_1 t\right] \Rightarrow x(t) = e^{-bt} \cdot \alpha \sin(k_1 t + \varphi)$, $T = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - b^2}}$



$$\left.\begin{array}{l} \text{β.] } \underline{\beta > k \;\rightarrow\; \beta^2 - k^2 = n^2} \\ \lambda_{1,2} = -\beta \pm n \end{array}\right\} \Rightarrow \quad x(t) = e^{-\beta t}\left[c_1 \cdot e^{nt} + c_2 e^{-nt}\right] =$$

$$= \cdots = e^{-\beta t}\left[A\cos(nt) + B\sin(nt)\right]$$



Η λύση δίνεται με την παραπάνω μορφή. Και υπάρχουν οι 3 παραπάνω περιπτώσεις (στο σχήμα).

Εξαναγκασμένη (Δυναμική) Ταλάντωση

Νόμος του Νεύτωνα: $m\ddot{x} = -cx + Q$ $\qquad (Q \nparallel -cx)$

$$m\ddot{x} = -cx + Q_0 \cdot \sin(pt) \qquad (14)$$

$\hookrightarrow$ συχνότητα ταλαντωτή.

$$\Rightarrow \ddot{x} + \frac{c}{m}x = \frac{Q_0}{m}\cdot\sin(pt) \Rightarrow \boxed{\ddot{x} + k^2 x = P\cdot\sin(pt) \quad (15)}$$

$$\chi(t) = x(t) + \zeta(t) \; (16), \text{ όπου } \zeta(t) = A\cdot\sin(pt) \; (17)$$

$$(15) \xrightarrow{(17)} A(k^2 - p^2)\sin(pt) = P\sin(pt)$$

$$\text{α.] } \underline{\text{Αν } k \neq p} \Rightarrow A = \frac{P}{k^2 - p^2}\cdot\sin(pt)$$

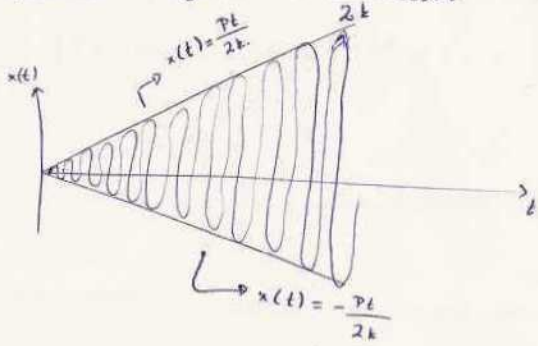
$$(16) \Longrightarrow x(t) = \alpha\cdot\cos(kt + \varphi) + \frac{P}{k^2 - p^2}\sin(pt) \; (18)$$

6] $k=p$. Αναζητώ τη λύση στην:

$$\xi_1(t)=\frac{P}{k^2-p^2}\left[\sin(pt)-\sin(kt)\right] \quad \left(\text{Έχω } \frac{0}{0} \text{ και εφαρμόζω de l'Hôpital}\right)$$

$$\xi_1(t)=P\,\frac{\frac{d}{dp}\left(\sin(pt)-\sin(kt)\right)}{\frac{d}{dp}\left(k^2-p^2\right)}=P\,\frac{t\cos(pt)}{-2p}=P\,\frac{t\cos(pt)}{-2p}$$

$$\Rightarrow \boxed{k=p} \Rightarrow \xi_1(t)=-\frac{Pt}{2k}\cos kt$$



Εξαναγκασμένη με απόσβεση

$$m\ddot{x}=-cx-\mu\dot{x}+Q_0\sin(pt) \quad (19) \Rightarrow \ddot{x}+2b\dot{x}+k^2x=P\sin(pt) \quad (20)$$

όπου $\frac{c}{m}=k^2$, $\frac{\mu}{m}=2b$, $\frac{Q_0}{m}=P$

$$X(t)=x(t)+\xi(t)$$

Άρα (αν $b<k$) $x(t)=ae^{-bt}\sin(k_1t+\varphi)$, $k_1=\sqrt{k^2-b^2}$

$$\xi(t)=A\cdot\sin(pt-\beta) \quad (21)$$

→ διαφορά φάσης λόγω απόσβεσης

Αν $pt-\beta=\vartheta \longrightarrow \dot{\xi}(t)=Ap\cos\vartheta$, $\ddot{\xi}(t)=-Ap^2\cdot\sin\vartheta$. (22)

$$(20)\xrightarrow{(21),(22)} -Ap^2\sin\vartheta+2b\cdot Ap\cdot\cos\vartheta+k^2A\sin\vartheta=P\cdot\sin(\vartheta+\beta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -Ap^2\sin\vartheta+2Abp\cos\vartheta+Ak^2\sin\vartheta=P\cos\beta\sin\vartheta+P\sin\beta\cos\vartheta \Rightarrow (23)$$

$$(23)\Rightarrow A(k^2-p^2)=P\cos\beta \quad (24) \quad \text{και} \quad 2Abp=P\sin\beta \quad (25)$$